
Feuille d'exercices n° 9: Indice, formules de Cauchy

Exercice 1. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct.

Calculer $\int_C \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$.

Exercice 2. Soit γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcourue dans le sens direct ; avec $a, b > 0$. En calculant de deux façons différentes $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, déterminer la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Exercice 3. On note C le cercle unité de \mathbb{C} (qu'on parcourt une fois dans le sens direct dans les intégrales ci-dessous). Soit $\varphi : C \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que

$$\overline{\int_C \varphi(z) dz} = - \int_C \overline{\varphi(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Soit U un domaine contenant le disque fermé $\bar{D}(0, 1)$, soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in U \setminus C$.

Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} dz$ est égal à $\overline{f(0)}$ si $|z_0| < 1$; et égal à $\overline{f(0)} - \overline{f(1/\bar{z}_0)}$ si $|z_0| > 1$.

Exercice 4. Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_\gamma \bar{z} dz.$$

Exercice 5. Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1 + i, 1 - i, -1 - i$ et $-1 + i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z - 1}{z} dz.$$

Exercice 6. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ on a :

$$e^{bz} - e^{az} \leq (b - a)|z|e^{b\operatorname{Re}(z)}.$$

Exercice 7. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$.

Exercice 8. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :

1) $\int_\gamma e^z dz$.

2) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$.

3) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$

4) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$

5) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2} dz$.