Mesure et intégration

Licence de Mathématiques
Université Lyon 1

Dragoş Iftimie

Table des matières

Mise à jour le 20 septembre 2024.

1 Introduction

Ce texte s'inspire fortement des 3 supports de cours de licence suivants :
— T. Gallay, Théorie de la mesure et de l'intégration, Grenoble.
— N. Lerner, Intégration, Rennes.
— P. Mironescu, Mesure et intégration, Lyon.

Nous disposons de la théorie de l'intégrale de Riemann qui permet d'intégrer beaucoup de fonctions dont notamment les fonctions continues. Cette théorie est-elle suffisante pour les besoins de l'intégration ? Voici quelques problèmes posées par l'intégrale de Riemann.

— L'intégrale de Riemann est essentiellement réservée aux fonctions continues, en tout cas il faut au moins que les fonctions soient bornées. Un théorème du à Lebesgue dit d'ailleurs qu'une fonction bornée est intégrable Riemann si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. En utilisant les intégrales généralisées, on peut aussi traiter des fonctions continues avec quelques singularités ou sur des intervalles non-bornés mais cela reste très limité et pas facile à manipuler.
— Une fonction relativement simple comme la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable Riemann.
— Si f est continue et dérivable, dans quelle mesure l'égalité $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ est-elle vraie ?
— Très important, dans quelle mesure la convergence simple de f_n vers f implique la convergence de leurs intégrales ? Le critère pour l'intégrale de Riemann nécessite la convergence uniforme de la suite f_n, condition bien trop restrictive.
— Nous avons besoin d'intégrer par rapport à d'autres mesures, par exemple en théorie des probabilités. C'est-à-dire qu'on pourrait convenir que la mesure d'un intervalle $[a, b]$ n'est pas forcément $b - a$. Que devient l'intégrale dans ce cas ?

Pour répondre à ces questions, Lebesgue a construit une autre théorie de l'intégrale que l'on connaît aujourd'hui sous le nom d'intégrale de Lebesgue. Son idée de départ a été très simple ; voici un aperçu (très) simplifié pour donner une petite idée de son approche. Pour mesurer l'aire du sous-graphe d'une fonction (qui est l'intégrale de la fonction), Riemann prenait l'intersection du sous-graphe avec une droite verticale et mesurait la longueur du segment obtenu (puis "sommait" toutes ces longueurs). Lebesgue fait la même chose mais en prenant des droites horizontales au lieu de droites verticales. Étonnamment, cette approche donne une notion d'intégrale bien plus robuste et permet d'intégrer bien plus de fonctions. Malheureusement, contrairement à l'intersection du sous-graphe avec une droite verticale qui est simplement un segment, l'intersection du sous-graphe avec une droite horizontale peut être un ensemble très compliqué. Ce n'est pas clair qu'on puisse le mesurer. On ne peut pas mesurer tous les ensembles. Citons à cet effet le paradoxe de Banach-Tarski qui date de 1923 : ces auteurs ont découpé la boule unité de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux qui peuvent être réarrangés pour faire deux boules unité complètes ! Cela veut bien dire que l'on ne peut pas mesurer de manière raisonnable ces morceaux, sinon on aurait d'une part que la mesure de la boule unité est la somme des mesures de ces morceaux, et cette même somme fera aussi le double de la mesure de la boule unité ! Une bonne partie de ce cours sera d'ailleurs dédié à notion de mesurabilité.

2 Limites inférieures et supérieures. Dénombrement

2.1 Limites inférieures et supérieures

Rappelons d'abord que $\overline{\mathbb{R}}$, la droite réelle achevée, est définie par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On peut additionner et multiplier les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, à l'exception des indéterminations $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$. Rappelons maintenant les définitions de sup et inf.

Définition 2.1 (inf, sup)**.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *non-vide. On définit* $\sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *comme le plus petit majorant de* A *et* $\inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *comme le plus grand minorant de* A*.*

Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}$ et posons $y_n = \sup_{k \geq n} x_k$. La suite $y_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est décroissante, elle admet donc une limite qui est égale à son inf. Cela justifie la définition suivante.

Définition 2.2 (liminf, limsup)**.** *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{R}$*.*

— *On définit la limite supérieure de* x_n *comme*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} x_k = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} x_k.$$

— *On définit la limite inférieure de* x_n *comme*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} x_k = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} x_k.$$

Rappelons enfin que la valeur d'adhérence d'une suite se définit comme la limite d'une sous-suite de la suite en question. Nous travaillerons ici avec des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

La proposition suivante regroupe plusieurs propriétés des limites inférieures et supérieures.

Proposition 2.3. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{R}$*. Nous avons les affirmations suivantes.*

a) $\limsup_{n\to\infty} x_n$ *est la plus grande valeur d'adhérence de* x_n *et* $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *est la plus petite valeur d'adhérence de* x_n*.*

b) Nous avons que $x_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ *quand* $n \to \infty$ *si et seulement si* $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = l$*.*

c) Si $(y_n)_n$ *est une autre suite de* $\mathbb{R}$ *alors* $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$ *dès lors que cette dernière somme est bien définie.*

2.2 Dénombrement

Il existe deux définitions d'un ensemble dénombrable suivant que les ensembles finis sont considérés dénombrables ou pas. Nous adopterons ici la convention qu'ils ne le sont pas.

Définition 2.4 (dénombrabilité)**.**

— *Un ensemble* X *est dit dénombrable s'il existe une bijection de* X *dans* $\mathbb{N}$*.*

— *Un ensemble* X *est dit au plus dénombrable, abrégé en a.p.d., s'il est fini ou dénombrable.*

Nous avons les deux propriétés suivantes.

Proposition 2.5.

a) Une union a.p.d.d'ensembles a.p.d.est a.p.d..

b) Un produit fini d'ensembles a.p.d.est a.p.d..

Les exemples classiques sont $\mathbb{Q}$ qui est dénombrable et $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas. Cela vient de l'écriture décimale et de la non dénombrabilité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Nous avons en effet le théorème de Cantor suivant.

Théorème 2.6 (Cantor)**.** *Si* E *est un ensemble non-vide, il n'existe pas de bijection entre* E *et* $\mathscr{P}(E)$ *(on a désigné par* $\mathscr{P}(E)$ *l'ensemble des parties de* E*).*

3 Ensembles et fonctions mesurables. Tribus

3.1 Tribus. Espaces mesurables

Définition 3.1 (tribu, espace mesurable)**.** *Soit X un ensemble. Une famille $\mathscr{M}$ de parties de X est une tribu sur X si :*

a) $A \in \mathscr{M}$ implique $A^c \in \mathscr{M}$;

b) si $A_n \in \mathscr{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$;

c) $\emptyset, X \in \mathscr{M}$.

Le couple $(X, \mathscr{M})$ est dit espace mesurable et les éléments de $\mathscr{M}$ sont dits ensembles mesurables.

En anglais, une tribu est une "σ-algebra", d'où parfois la terminologie σ-algèbre en français.

Il est facile de voir que les propriétés a) et b) impliquent c). Une tribu est donc une famille de sous-ensembles stable par union dénombrable et par passage au complémentaire. Le complémentaire d'une union étant l'intersection des complémentaires, on en déduit qu'une tribu est aussi stable par intersection dénombrable.

Exemples. Soit X un ensemble.

— $\mathscr{M} = \{\emptyset, X\}$ est une tribu.

— $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$ est une tribu. Cas particulier $X = \mathbb{N}$: la tribu qui sera considérée sur $\mathbb{N}$ est $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

— Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de X (disjoints deux à deux et d'union X), alors toutes les unions possibles de A_j forment une tribu sur X.

Pour définir la tribu engendré par une famille de sous-ensembles, nous avons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 3.2. *Soit X un ensemble et $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$ une famille arbitraire de tribus sur X. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathscr{M}_i$ est une tribu sur X.*

Cela justifie la définition suivante.

Définition 3.3 (tribu engendrée)**.** *Soit X un ensemble et $\mathscr{F}$ une famille de parties de X. On définit $\mathscr{M}(\mathscr{F})$, la tribu engendrée par $\mathscr{F}$, comme l'intersection de toutes les tribus de X qui contiennent $\mathscr{F}$.*

Nous avons la propriété suivante :

Proposition 3.4. *La tribu engendrée par $\mathscr{F}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathscr{F}$.*

Fin du cours 1 (03/09/2024).

Définissons aussi la tribu trace.

Définition 3.5. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$ un sous-ensemble arbitraire. La tribu trace sur A est la tribu $\mathscr{M}_A = A \cap \mathscr{M} = \{A \cap B \ ; \ B \in \mathscr{M}\}$.*

3.2 Fonctions mesurables

Une fonction est dite mesurable si l'image réciproque d'un ensemble mesurable est mesurable :

Définition 3.6 (fonction mesurable)**.** *Soient $(X_1, \mathscr{M}_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2)$ deux espaces mesurables et $f : X_1 \to X_2$ une application. La fonction f est dite mesurable (par rapport à ces deux tribus) si pour tout $A_2 \in \mathscr{M}_2$ nous avons que $f^{-1}(A_2) \in \mathscr{M}_1$.*

La notion de mesurabilité d'une application $f : X_1 \to X_2$ dépend des tribus considérées sur X_1 et X_2. On doit donc spécifier à chaque fois de quelles tribus il s'agit. Par abus de notation, lorsqu'une seule tribu a été définie sur X_1 et X_2, ou que les tribus considérées sont sous-entendues, on peut omettre de préciser les tribus et parler simplement d'application mesurable de X_1 dans X_2.

Voici quelques propriétés des applications mesurables.

Proposition 3.7. *a) Soient $(X_1, \mathscr{M}_1)$, $(X_2, \mathscr{M}_2)$ et $(X_3, \mathscr{M}_3)$ trois espaces mesurables et $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ deux applications mesurables (pour les tribus considérées). Alors $g \circ f : X_1 \to X_3$ est mesurable (pour les tribus considérées).*

b) Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable, Y un ensemble et $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathscr{N} = \{B \subset Y \ ; \ f^{-1}(B) \in \mathscr{M}\}$. Alors $\mathscr{N}$ est une tribu sur Y qui rend f mesurable, et c'est la plus grande tribu avec cette propriété.

c) Soient $(X_1, \mathscr{M}_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2)$ deux espaces mesurables et $f : X_1 \to X_2$ une application. On suppose que $\mathscr{M}_2$ est engendrée par une famille $\mathscr{F}$: $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}(\mathscr{F})$. Alors f est mesurable si et seulement si pour tout $A_2 \in \mathscr{F}$ nous avons que $f^{-1}(A_2) \in \mathscr{M}_1$.

On retiendra que la composition de deux fonctions mesurables est mesurable et qu'il suffit de vérifier la mesurabilité d'une fonction sur une famille qui engendre la tribu de l'espace d'arrivée de la fonction.

3.3 Tribu de Borel

Un exemple fondamental de tribu est la tribu de Borel.

Définition 3.8 (tribu de Borel, borélien)**.** *Soit (X, d) un espace métrique. La tribu de Borel sur X, notée par $\mathscr{B}(X)$, est la tribu engendrée par les ouverts de X (par rapport à la distance d). Les éléments de la tribu de Borel sont dits ensembles boréliens, ou tout simplement boréliens.*

Attention, les ouverts ne forment pas une tribu car le complémentaire d'un ouvert n'est généralement pas ouvert. Les boréliens forment une famille très grande. Voici quelques exemples de boréliens :

— les fermés ;
— toute union dénombrable d'ensembles fermés ;
— $\mathbb{Q}$ est borélien dans $\mathbb{R}$;
— les irrationnels forment un ensemble borélien dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions continues sont mesurables pour la tribu de Borel.

Proposition 3.9. *Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : X_1 \to X_2$ une fonction continue. Alors f est mesurable lorsqu'on munit X_1 et X_2 de leurs tribus de Borel.*

Définition 3.10 (pavé)**.** *Un pavé de $\mathbb{R}^d$ est un produit d'intervalles fermés et bornées.*

Proposition 3.11. *Il existe une famille dénombrable de pavés de $\mathbb{R}^d$ telle que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est union dénombrable de ces pavés. En particulier, cette famille dénombrable de pavés engendre les boréliens de $\mathbb{R}^d$. La même chose est vraie pour une certaine famille dénombrable de boules ouvertes, et aussi pour une certaine famille dénombrable de produits de boules ouvertes.*

Dans le cas de $\mathbb{R}$ on peut restreindre encore plus la famille qui engendre les boréliens.

Proposition 3.12. *La tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par :*

a) les intervalles $]a, +\infty[$ quand a parcourt $\mathbb{R}$;

b) les intervalles $[a, +\infty[$ quand a parcourt $\mathbb{R}$;

c) les intervalles $]-\infty, a[$ quand a parcourt $\mathbb{R}$;

d) les intervalles $]-\infty, a]$ quand a parcourt $\mathbb{R}$.

3.4 Propriétés des applications mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$

Une application immédiate de la caractérisation des boréliens sur $\mathbb{R}$ vue au-dessus et de la proposition 3.7 nous permet de montrer par exemple l'énoncé suivant :

Corollaire 3.13. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu de Borel. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}([a, +\infty[) \in \mathscr{M}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*

Une autre application nous permet de montrer que toute application monotone est mesurable.

Proposition 3.14. *Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f est mesurable lorsqu'on munit X de la tribu trace de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ de la tribu de Borel.*

Nous munirons par défaut $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^d$, par la tribu de Borel. Si aucune mention n'est faite, il faut supposer que la tribu considérée sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^d$, est la tribu de Borel.

La fonction indicatrice d'un ensemble est mesurable si et seulement si l'ensemble est mesurable.

Proposition 3.15. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable, $A \subset X$. La fonction indicatrice de A, $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, est mesurable si et seulement si A est mesurable.*

Proposition 3.16. *Soit $(X, \mathscr{M})$ et $(Y, \mathscr{N})$ deux espaces mesurables, $u_1, \dots, u_d : X \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables et $\phi : \mathbb{R}^d \to Y$ mesurable. Alors l'application $x \mapsto \phi(u_1(x), \dots, u_d(x))$ est mesurable de X dans Y.*

Voici un corollaire immédiat.

Corollaire 3.17. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable.*

a) Une application $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont mesurables de X dans $\mathbb{R}$. De plus, si f est mesurable alors $|f|$ est mesurable aussi.

b) Si $f, g : X \to \mathbb{C}$ sont mesurables, alors $f + g$ et fg sont mesurables aussi.

Proposition 3.18. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. Il existe une application $\alpha : X \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $|\alpha| = 1$ et $f = \alpha|f|$ partout.*

$\boxed{\text{Fin du cours 2 (10/09/2024).}}$

3.5 Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$, fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nous avons une structure d'espace métrique donnée par la distance $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ où on convient que $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. On peut donc parler de boréliens et de mesurabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$. On vérifie aisément que les boules ouvertes de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les intervalles (où $\pm\infty$ peuvent être des extrémités d'intervalles et appartenir à l'intervalle ou pas).

Sur $\overline{\mathbb{R}}$ on peut faire des limites, pendre des sup, des inf, des limsup et des liminf. Ce qui a été fait dans la partie 2.1 reste valable dans $\overline{\mathbb{R}}$ à ceci près que lorsqu'il y a une somme il faut imposer la condition que la somme soit bien définie (c'est-à-dire qu'on ne se retrouve pas à sommer $-\infty$ et $+\infty$).

La proposition 3.12 est vraie dans $\overline{\mathbb{R}}$ aussi : la tribu $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les intervalles $]a, +\infty]$ quand a parcourt $\mathbb{R}$.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.19. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors*

a) $\sup\limits_n f_n$ et $\inf\limits_n f_n$ sont des fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$;

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ sont des fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$;

c) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est limite simple de f_n, alors f est mesurable.

Dans $\overline{\mathbb{R}}$ nous utiliserons la convention $0 \cdot \infty = 0$. L'addition $(-\infty) + (+\infty)$ reste interdite.

3.6 Fonctions étagées

Une fonction étagée est une fonction positive mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Définition 3.20 (fonction étagée)**.** *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable. Une fonction f est dite étagée sur X si :*

— *f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et mesurable de X dans $\mathbb{R}_+$;*

— *$f(X)$ est un ensemble fini.*

Si f est étagée, en posant $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (valeurs distinctes) et $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$ nous avons que

$$f = \alpha_1 \chi_{A_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{A_n}$$

où χ_{A_j} désigne la fonction indicatrice de A_j. Cette écriture est unique si les α_j sont distincts 2 à 2 et si les A_j forment une partition de X. On l'appelle écriture canonique de la fonction étagée f.

Théorème 3.21. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors il existe une suite de fonctions étagées f_n telles que*

— *la suite f_n est croissante : $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$;*

— *la suite f_n tend vers f simplement.*

Si on a de plus que f est bornée, alors on peut supposer que la suite f_n tend vers f uniformément sur X.

4 Mesures positives

Définition 4.1 (mesure positive)**.** *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur $(X, \mathscr{M})$ est une application $\mu : \mathscr{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que*

— *$\mu(\emptyset) = 0$;*

— *Si $(A_n)_n$ est une suite d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints, alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Le triplet $(X, \mathscr{M}, \mu)$ est dit espace mesuré.

La deuxième propriété de la définition est dite σ-additivité. Les mesures peuvent être de plusieurs types.

Définition 4.2. *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que :*

— *la mesure μ est finie si $\mu(X) < \infty$;*

— *la mesure μ est une mesure de probabilités si $\mu(X) = 1$;*

— *la mesure μ est σ-finie s'il existe une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_n$ tels que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

— *la mesure μ est borélienne si la tribu $\mathscr{M}$ est la tribu de Borel ;*

— *la mesure μ est de Radon si elle est borélienne et finie sur les compacts (la mesure de tout compact est finie).*

Exemples.

a) Si X est un ensemble fini et $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$, $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$ pour tout $A \subset X$ est une mesure finie.

b) Si X est un ensemble fini et $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$, $\mu(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(X)}$ pour tout $A \subset X$ est une mesure de probabilités.

c) Si X est un ensemble arbitraire et $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$, la mesure de comptage définie par

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure.

d) Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $a \in X$. L'application δ_a définie par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

est une mesure appelée mesure de Dirac en a (ou masse de Dirac).

e) Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ il existe une unique mesure positive μ telle que $\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = b-a$ pour tout $a < b$ finis. Cette mesure est dite mesure de Borel. L'existence de la mesure de Borel n'est pas du tout évidente. Sa construction est difficile et fait l'objet d'un chapitre ultérieur.

f) Sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ il existe une unique mesure positive μ telle que la mesure de tout pavé est le produit des longueurs de ses côtés : $\mu(\prod\limits_j [a_j, b_j]) = \prod\limits_j (b_j - a_j)$. C'est la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^d$.

g) Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathscr{N} = \{B \subset Y \; ; \; f^{-1}(B) \in \mathscr{M}\}$ la tribu image sur Y. L'application $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ pour tout $B \in \mathscr{N}$ est une mesure sur $\mathscr{N}$ dite mesure image de μ.

Avant de montrer quelques propriétés des mesures, nous avons besoin du résultat suivant sur les séries a deux indices.

Lemme 4.3. *On considère des nombres $a_{m,n} \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $m, n \in \mathbb{N}$. Nous avons que*

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} \Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} \Big).$$

La valeur commune de ces deux sommes est notée plus simplement par

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{m,n} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} \Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} \Big).$$

Voici quelques opérations sur les mesures.

Proposition 4.4 (opérations sur les mesures)**.** *a) Si μ est mesure et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors $\alpha\mu$ est une mesure. Ici $(\alpha\mu)(A) = \alpha\mu(A)$ avec la convention $0 \cdot \infty = 0$.*

b) Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures sur un même espace, alors $\mu_1 + \mu_2$ est une mesure. Ici on a posé $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$.

c) Si $(\mu_n)_n$ est une suite de mesures sur un même espace, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ est une mesure. Ici on a posé $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n)(A) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$.

Ces opérations nous permettent d'avoir d'autres exemples de mesures.

Exemples.

a) Probabilité de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ donnée par : $\mu = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$.

b) Probabilité de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\mu = e^{-\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$.

Nous pouvons maintenant énoncer quelques propriétés des mesures.

Proposition 4.5. *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. Nous avons les propriétés suivantes :*

a) Si $A \subset B$ et A, B mesurables, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) Si A et B sont deux ensembles mesurables, alors $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

c) Si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'ensembles mesurables, $A_n \subset A_{n+1}$, et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

d) Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'ensembles mesurables, $A_n \supset A_{n+1}$, $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et en plus A_0 est de mesure finie, alors $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

e) Si $(A_n)_n$ est une suite d'ensembles mesurables, alors $\mu\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

f) La propriété du c) plus $\mu(\emptyset) = 0$ plus $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ pour tous A, B mesurables disjoints, forment un ensemble de propriétés équivalent à la définition de la mesure.

Fin du cours 3 (17/09/2024).