Temperley-Lieb 代数とその表現

庵原　謙治 (Université de Lyon, FRANCE)

August 7 - 10, 2017

概要

この講義では, Temperley-Lieb 代数 $T_N(\delta)$ を定義し, その表現に関して基本的な事実を述べた後に最近の進展について述べることを目標とする.

目次

0 基礎概念の復習 (予習?)

ここでは、基礎的な概念の復習（予習？）をさらっと行う. 詳しくは例えば, [H] 等のテキストを適当に参照の事.

0.1 環と加群

0.1.1 環

まずは、環の定義の復習から. 集合 R が環であるとは, R 上に 2 つの演算 $+, \cdot$ が定義されていて、

1. $(R, +)$ は Abel 群,
2. $(R, \cdot)$ は semi-group (単位元の存在は仮定しない),
3. この 2 つの演算は分配法則を満たす: $x, y, z \in R$ に対し、
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$

を満たすものを云う. 特に, $(R, \cdot)$ が monoïd (単位元が存在) のとき, R は単位的環であると云う.

例 0.1. $2\mathbb{Z}$ は可換環ではあるが, 積に関する単位元は無い.

補足 0.1. 国によって, あるいは人によって, 環の定義は様々なようである. 日本では, 単位的環の事を単純に環とよんでいる場合が多いように思うが、例えばフランスでは環は単位的とは限らない.

0.1.2 加群

次に、加群の定義について．R を環とし, M を Abel 群, とする．M が左 R-加群であるとは, 写像 $R \times M \to M; (r, m) \mapsto rm$ であって, 以下の性質を満たすものを云う: $r, s \in R$ 及び $x, y \in M$ に対し,

1. $r(x+y) = rx + ry$,
2. $(r+s)x = rx + sx$,
3. $(rs)x = r(sx)$,
4. 特に, R が単位的な場合, $1_R x = x$ ($1_R \in R$ は積に関する単位元).

右 R-加群 M の定義も、写像 $M \times R \to M; (m, r) \mapsto mr$ に対する適当な条件を課す事により定義される．

最後に, 両側加群を定義する． R, S を環とする． このとき, Abel 群 M が両側 (R, S)-加群 であるとは, M が左 R-加群及び右 S-加群の構造を同時に持ち, 更に, 任意の $r \in R, s \in S$ 及び $m \in M$ に対し、

1. $(rx)s = r(xs)$

を満たすものを云う．特に, $R = S$ の場合, 両側 R-加群と単純に云う．以下の例は、この講義で見られる典型的な両側加群の例である．

問題 0.1. $\mathbb{K}$ を可換体とし, G を有限群とする．このとき, 群環 $\mathbb{K}[G]$ とは次で定義される単位的環である (この事を確認せよ):

$$\mathbb{K}[G] = \{\sum_{g \in G} c_g [g] | c_g \in \mathbb{K}\}, \qquad [g] \cdot [h] := [gh].$$

(上の積の構造を $[g]$ 及び $[h]$ に関して線形に拡張せよ．以下同様.) 次に, M を 体 $\mathbb{K}$ 上の G の有限次元表現とする, つまり, M は $\mathbb{K}[G]$-加群とする．このとき, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$, $m \in M$ に対し,

1. $([g].f)(m) := g(f(m))$ によって $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ に 左 $\mathbb{K}[G]$-加群の構造がはいり,

2. $(f.[g])(m) := f(gm)$ によって $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ に 右 $\mathbb{K}[G]$-加群の構造がはいる.

3. 更に, これらの 2 つの構造によって, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ は 両側 $\mathbb{K}[G]$-加群の構造がはいる.

以上を示せ.

特に, G として n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ を、この講義では扱う. この場合についての詳細は, 例えば [S] を参照の事.

次の練習問題は適当な図書 (例えば [AM]) を参考にしつつ取り組むと (Jordan 標準形の) 勉強になるが, 少し難しいかも知れない...

問題 0.2. V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元のベクトル空間とし、 $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ とする. このとき、V に 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[T]$ 上の左加群の構造が次の様にして、定義される :

$$P(T).v := P(f)(v) \qquad (\, P \in \mathbb{C}[T],\, v \in V\,).$$

1. この事を示せ.
2. 1. を用いて、次の事を示せ : *monic* で次数が $\dim_{\mathbb{C}} V$ の多項式 Φ であって, $\Phi(f) = 0$ となるものが存在する.
   ヒント: Φ は f の特性多項式 (*cf.* [AM] の *page 21* を参照の事).
3. 2. を用いて, f に対して, 次の性質を満たす V の基底 $\mathcal{B}$ が存在する事を示せ: 自己準同型 f の基底 $\mathcal{B}$ に関する表示は *Jordan block* の直和となる. ヒント: f の最小多項式を $m_f(T)$ とし, $m_f(T) = \prod_{i=1}^r (T - \lambda_i)^{m_i}$ と書く. この時, $V_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}$ とおくと, $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ となる (何故か？). 各 V_i 上の T の作用がどうなっているかを考えよ.

ところで、上の議論は係数体が例えば $\mathbb{R}$ の時、どのように変わるだろうか？

0.2 Tensor 積

ここでは、所謂 tensor 積の定義をし、我々にとって有用な場合を例に挙げる.

2 つの環 A, R の間に環の準同型 $f : A \to R$ が存在するとき, R を A-代数 あるいは A-多元環、と云う.

補足 0.2. A 及び R が単位的環の場合、環の準同型と云えば, 単位元を単位元に移すもののみを考える.

以下, 特に断らない限り, 環といえば単位的なものを指す事にする.

0.2.1 定義

さて, R を環とし, M を右 R-加群, N を左 R-加群, また G を Abel 群とする. 直積集合 $M \times N$ から G への写像

$$\varphi : M \times N \longrightarrow G$$

が R-balanced map であるとは, 以下の性質を満たすものを云う: $a \in A$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ に対し,

1. $\varphi(m + m', n) = \varphi(m, n) + \varphi(m', n)$,
2. $\varphi(m, n + n') = \varphi(m, n) + \varphi(m, n')$,
3. $\varphi(ma, n) = \varphi(m, an)$.

このとき、次の普遍性を満たすものが必ず存在する:

定理 0.1. *M を右 R-加群, N を左 R-加群とする. 次の性質を満たす Abel 群 T 及び R-balanced map $\tau : M \times N \to T$ が存在する: 任意の R-balanced map $\varphi : M \times N \to G$ に対し、Abel 群の準同型 $f : T \to G$ であって, $\varphi = f \circ \tau$ を満たすものが唯一存在する :*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \arrow[dl, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

また, このような Abel 群 T は同型を除いて、一意的に定まる.

この T を M と N の R 上の tensor 積 と云い, $M \otimes_R N$ と記す. また, $\tau(m, n) = m \otimes n$ と記す.

証明. (概略) 一意性の証明は、常套手段なので省略する. 存在性であるが, これも単純で, 以下の通り. まずは, $\mathcal{F}$ として, (m, n) $(m \in M, n \in N)$ の生成する free Abel 群 を考える (つまり、これは只の形式有限和 $\sum_i k_i(m_i, n_i)$ $(k_i \in \mathbb{Z}, m_i \in M, n_i \in N)$ のなす巨大な Abel 群の集合である). 次に、$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の次の形の元で生成される部分群とする:

1. $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$,
2. $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$,

3. $(mr, n) - (m, rn)$,

但し, $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ とする． このとき, $T := \mathcal{F}/\mathcal{G}$ 及び $\tau : M \times N \to T; (m, n) \mapsto p(m, n)$, 但し $p : \mathcal{F} \twoheadrightarrow T$ 標準射影とする, が定理の性質を満たすことは簡単に示せる. $\square$

問題 0.3. *m, n を 2 以上の整数とし, その最大公約数を d とする. このとき, 次の同型が存在することを示せ: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

この tensor 積は色んな性質を満たすが多くの場合、普遍性の簡単な帰結として得られる. 以下にそのうちのいくつかの性質を述べる.

0.2.2 基本的な性質

I を集合とし, M_i $(i \in I)$ を 右 R-加群, N を左 R-加群とするとき、次の同型が成り立つ:

$$(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N.$$

問題 0.4. *任意の右 R-加群の完全列 $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ 及び, 任意の左 R-加群 N に対し、*

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列をなす. この事を示せ.

R_1, R_2, R_3 を環とし, M を両側 (R_1, R_2)-加群, N を両側 (R_2, R_3)-加群とすると, $M \otimes_{R_2} N$ には自然に (R_1, R_3)-加群の構造がはいる. 特に, A, B が共に R-代数ならば $A \otimes_R B$ には自然に R-代数の構造が入る:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2).$$

問題 0.5. *$\mathbb{K}$ を可換体とする. この時,*

1. *G_1, G_2 を有限群とすると, 次の同型が存在する事を示せ: $\mathbb{K}[G_1] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G_2] \cong \mathbb{K}[G_1 \times G_2]$.*

2. *G を有限群, H をその部分群とし M を 体 $\mathbb{K}$ 上の H の有限次元表現とする. このとき, $\mathrm{Ind}_H^G M := \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} M$ は自然に G の有限次元表現の構造が入る事を示せ. この $\mathrm{Ind}_H^G M$ を 誘導表現 と云う.*

0.3 半単純代数

0.3.1 Chain condition

R を環とし, M を R-加群 (右でも左でも両側でも何でも良い) とする. R-加群 M が 昇鎖条件 を満たすとは, 任意の R-加群の増大列

$$M = M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$$

に対し, $M_n = M_{n+1} = \cdots$ となるような n が存在する事を云い, このとき, M を Noether 加群 と云う. 逆に, R-加群 M が 降鎖条件 を満たすとは, 任意の R-加群の減少列

$$M = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

に対し, $M_n = M_{n+1} = \cdots$ となるような n が存在する事を云い, このとき, M を Artin 加群 と云う.

0.3.2 半単純性

環 R のすべての極大左イデアルの共通部分を Jacobson 根基 と云い, $\mathrm{Jac}(R)$ と記す. これは一般に両側イデアルになることが知られている. 従って, 特に 0 でない 単純環, つまり, 非自明な両側イデアルを持たない環, の根基は 0 となる. 一般に, 根基が 0 となる環を 半単純環 と云う. この部分節の目的は, 半単純環の構造定理を与える事である. その為に, もう少し準備をする.

一般に左 R-加群 M について、M の任意の部分 R-加群 N に対し, ある部分 R-加群 N' であって, $M = N \oplus N'$ を満たすものが存在するとき, M を 半単純 あるいは 完全可約 である, と云う.

命題 0.1. *半単純加群の部分加群や剰余加群は半単純である.*

単純加群は半単純であるが, 実は以下の定理が知られている:

定理 0.2. *加群が半単純である為には, 単純加群の直和である事が必要十分である.*

命題 0.2 (Schur の補題)**.** *1. 組成列を持つ左 R-加群 M, N が共通の組成因子を持たなければ, $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$.*

2. M が単純加群ならば, $\mathrm{End}_R(M)$ は斜体である.

ここで、左 R-加群 M の列

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

が組成列 であるとは, 各商 M_i/M_{i-1} が単純加群になる事を云い, この時, 各剰余加群 M_i/M_{i-1} $(0 < i \leq n)$ を 組成因子 と云う.

0.3.3 構造定理

以上の準備の基で次の定理が知られている:

定理 0.3 (Artin-Wedderburn の定理)**.** *以下は同値である:*

1. *左 R-加群 R は半単純加群である,*
2. *すべての左 R-加群は半単純加群である,*
3. *R は半単純左 Artin 環である,*
4. *R は左 Artin 環であり, 単純環の直積である,*
5. *斜体 $D_1, D_2, \cdots, D_r$ であって*
$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$
を満たすものが存在する. ここに, $M_n(D)$ は斜体 D 上の n 次の正方行列環である.

0.3.4 群環の構造

この定理の応用として, 次の定理が良く知られている:

定理 0.4 (Maschke の定理)**.** *G を有限群とし, $\mathbb{K}$ をその標数が G の位数と互いに素な可換体, とする. このとき, 群環 $\mathbb{K}[G]$ は半単純 Artin 環である.*

証明. (概略) Artin-Wedderburn の定理により, 任意の左 $\mathbb{K}[G]$-加群が半単純であることを示せばよい. N を M の部分加群とし $p : M \twoheadrightarrow M/N$ を標準射影とする. このとき, $\mathbb{K}$-線形な写像 $\varphi : M/N \hookrightarrow M$ であって $p \circ \varphi = \mathrm{id}_{M/N}$ となるものが存在する. そこで, $\psi : M/N \hookrightarrow M$ を

$$\psi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi(g^{-1}x)$$

にて定義すると, この写像は $\mathbb{K}[G]$-準同型かつ $p \circ \psi = \mathrm{id}_{M/N}$ を満たしている. 従って $M = M/N \oplus \mathrm{Im}\psi$ は $\mathbb{K}[G]$-加群としての直和分解を与える. □

実は、この定理の系として、次の事実が従う:

系 0.1. $\mathbb{K}$ が更に代数的閉体であるとすると,

$$\mathbb{K}[G] \cong M_{n_1}(\mathbb{K}) \times M_{n_2}(\mathbb{K}) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathbb{K}),$$

となり, 特に, 単純左 $\mathbb{K}[G]$-加群の同型類は r 個で, その $\mathbb{K}$ 上の次元 n_i について、以下の等式が成り立つ :

$$\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = |G|.$$

問題 0.6. この系の状況下で、以下を示せ*:*

1. 群 G の各共役類 $\mathcal{O}$ に対し $z_{\mathcal{O}} := \sum_{g \in \mathcal{O}}[g]$ とおくと, $\{z_{\mathcal{O}}\}_{\mathcal{O}:\,\text{共役類}}$ は群環 $\mathbb{K}[G]$ の中心の基底をなす*.*

2. G の共役類の個数は r に等しい*.*

最後に次の命題を揚げておこう:

命題 0.3. D を斜体とするとき*,* 単純 *Artin* 環 $M_n(D)$ の単純左加群は自然な加群 D^n に同型である*.*

1 Temperley-Lieb 代数

さて、頭痛のしそうな一般論は一旦忘れることにして (?), ここではこの講義の主役の紹介を行った後、いくつかの簡単な性質を直接的な方法で調べてみよう. ここで、Temperley-Lieb 代数の入門講義で結び目への応用について触れられているものとして [Wa] を勧める.

1.1 定義と簡単な性質

まずは、主役の代数を定義しよう:

定義 1.1 (cf. [TL]). $\delta \in \mathbb{C}$ 及び $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ とする*. Temperley Lieb* 代数 $TL_n(\delta)$ とは、$\mathbb{C}$ 上の代数であって*,* $f_1, \ldots, f_{n-1}$ で生成され、以下の基本関係式を満たすものを云う*:* $1 \leq i, j, k < n$ に対し*,*

$$\begin{aligned} &f_i^2 = \delta f_i, \\ &f_i f_{i\pm1} f_i = f_i, \\ &f_j f_k = f_k f_j \qquad |j-k| > 1. \end{aligned}$$

問題 1.1. $TL_n(\delta)$ と $TL_n(-\delta)$ は同型である事を示せ.

この代数をこのまま眺めていても,「あ、そうですか...」と言って、そのまま凍ってしまうだけだろう. もう少し扱いやすい記述を与えよう.

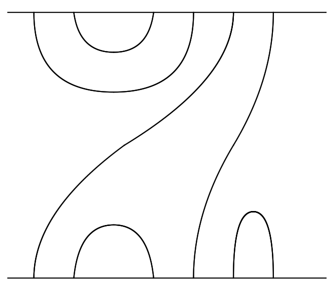
実は, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ は次の様な図式の言葉で記述される.

1.1.1 単純図式

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 単純 n-図式 とは, n 個の閉区間の $\mathbb{R} \times [0,1]$ への埋め込みの像 D であって, 以下の条件を満たすものとする:

(SD1) $\partial D \subset \mathbb{R} \times \{0,1\}$ かつ $D \setminus \partial D \subset \mathbb{R} \times (0,1)$,

(SD2) $t \in \{0,1\}$ に対し, $\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{t\}) = \{(1,t),(2,t),\cdots,(n,t)\}$ であり, その各点において D は $\mathbb{R} \times \{t\}$ に横断的に交わる.

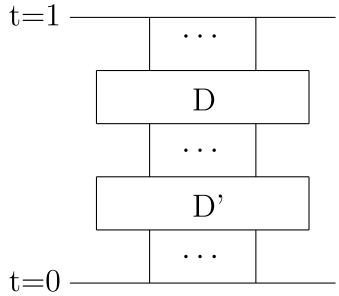


2 つの図式 D, D' が 同値である とは, 単純 n-図式の条件を保ったまま, D を連続的に変形して D' に変形できること, つまり, $\mathbb{R} \times [0,1]$ 上の $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ を不変にする isotopy $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$ であって,

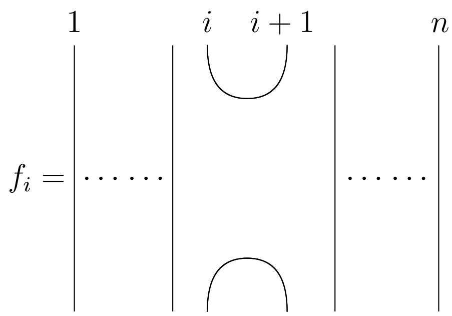
1. $\varphi_0 = \mathrm{id}$,
2. $\varphi_1(D) = D'$,
3. 任意の $t \in [0,1]$ に対し, $\varphi_t(D)$ は単純 n-図式である,

を満たすものが存在する事を云う. n を固定する毎に, 単純 n-図式の同値類の個数は有限である. この事は, 次の部分節で見る.

ここでは、Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ を単純 n-図式を用いて記述してみよう. まず、単純 n-図式の張る $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{D}_n$ と記す. 単純 n-図式 D, D' に対し, その積 $D \circ D'$ を次の図式で定義する:



つまり, 単純 n-図式 D を D' の上に置き, D の下端と D' の上端を繋ぎ, 高さを $\frac{1}{2}$ に圧縮して得られる 単純 n-図式を表すものとする. 但し, この過程で円が生じた場合はその度に図式を δ-倍し, その円を消すものとする. この様にして得られる代数は、実は Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ と同型になる事が示される. 実際に, $1 \leq i < n$ なる各 i に対し,



とおくと, この $f_1, \cdots, f_{n-1}$ は Temperley-Lieb 代数の基本関係式を満たすことが確認できる.

問題 1.2. この事を確認せよ.

より詳しい事を知りたい人は [GL2] を参照の事.

1.1.2 A-型の Hecke 環との関係

ここでは V. F. R. Jones の 1994 年の論文 [J2] の結果の一つを解説する. 詳しくは, [GL2] を参照の事.

定義 1.2. $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ 及び $q \in \mathbb{C}^*$ とし、これを固定する. *A_{n-1}-型の 岩堀 Hecke 環 $H_n(q)$* とは, 生成元 $T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ 及びその基本関係式

$$
\begin{aligned}
&(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0 \qquad 1 \leq i < n, \\
&T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \qquad 1 \leq i < n-1, \\
&T_i T_j = T_j T_i \qquad |i - j| > 1,
\end{aligned}
$$

を満たすものを云う.

特に $q=1$ の時, この代数は群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ に同型である.
さて、各 $1 \le i < n-1$ に対し,

$$E_i := 1 + q(T_i + T_{i+1}) + q^2(T_i T_{i+1} + T_{i+1} T_i) + q^3 T_i T_{i+1} T_i,$$

とおく.

問題 1.3. 次の等式を確認せよ: $E_i^2 = (1+q^2)(1+q^2+q^4)E_i$.
(*cf.* $[n]_q := \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおくと, $(1+q^2)(1+q^2+q^4) = [2]_q[3]_q q^3$.)

さて、$H_n(q)$ の $E_i\,(1 \le i < n-1)$ で生成される両側イデアルを I_n と記すと、実は以下の定理が成り立つ:

定理 1.1 (cf. [J3])**.** $H_n(q)/I_n \cong TL_n(-(q+q^{-1}))$.

証明. (概略) 各 $1 \le i < n$ に対し, $g_i = -(T_i + q^{-1})$ とおくと, Hecke 環 $H_n(q)$ は $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ で生成され以下の基本関係式を満たす事は容易に確かめられる:

$$\begin{aligned}
&g_i^2 = -(q+q^{-1})g_i \qquad 1 \le i < n,\\
&g_i g_{i+1} g_i - g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} - g_{i+1} \qquad 1 \le i < n-1,\\
&g_i g_j = g_j g_i \qquad |i-j| > 1.
\end{aligned}$$

問題 1.4. これを確かめよ.

ここで更に直接的な計算より, 次の等式が成り立っている事がわかる:

$$g_i g_{i+1} g_i - g_i = -q^{-3} E_i.$$

従って, $g_i \in H_n(q)$ を $f_i \in TL_n(-(q+q^{-1}))$ に移す (代数の) 全射準同型が存在する. この射の Kernel が両側イデアル I_n と一致する事は, 定義より従う. □

1.2 Catalan 数

ここでは所謂 Catalan 数[1]とよばれるものについて、語らむ. これは自然数 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

[1]ベルギー人数学者 Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) に因む

で定義される整数で, 色んな場面で顔を出す人気者である. 最初の数項を挙げると $C_0=1, C_1=1, C_2=2, C_3=5, C_4=14, C_5=42, C_6=132, C_7=429, C_8=1430, C_9=4862, C_{10}=16796, \ldots$ となっている. まずは、この数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ の生成級数 $C(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ を計算しよう.

補題 1.1. $C(x)=\dfrac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x}$.

証明. $xC(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ゆえ, $\frac{d}{dx}(xC(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ となる. ここで、少し tricky な変形をする:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}(4x)^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})}{n!}(4x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-(n-\frac{1}{2}))}{n!}(-4x)^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

よって, $xC(x)$ の定数項が 0 であることから結論が従う. □

次の練習問題は, この補題の簡単な系:

系 1.1. *任意の* $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *に対し, Catalan 数* C_n *は整数である.*

証明. (概略) Catalan 数の生成級数 $c(x)$ が次の等式を満たしていることを示す:

$$c(x)=xc(x)^2+1.$$

よって, 両辺の x^n の係数を比較することにより, 以下の漸化式が任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ で成り立っている事を示す:

$$C_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1-i}C_i.$$

最後に, 初期条件 $C_0=0$ から数学的帰納法により, 任意の $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $C_n\in\mathbb{Z}$ となっていることが示される.

問題 1.5. *これらを確かめよ.*

□

次に, Catalan 数が登場する色んな場面をみてみよう. 以下では $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする.

1. **Dyck 語**　2 つの文字, 例えば A , B, からなる長さが $2n$ の語 $w = w_1 w_2 \cdots w_{2n}$ であって, 次の条件を満たすものを云う:

$$\mathrm{Card}\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | k \le i \;\&\; w_k = A\} \ge \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | k \le i \;\&\; w_k = B\} \quad 1 \le i < 2n,$$
$$\mathrm{Card}\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | k \le 2n \;\&\; w_k = A\} = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | k \le 2n \;\&\; w_k = B\}.$$

長さが $2n$ の Dyck 語 の個数は C_n であることが知られている. 例えば, $n = 3$ の時, 以下がそのリストを与えている:

$$ABABAB, \qquad ABAABB, \qquad AABABB, \qquad AABBAB, \qquad AAABBB.$$

ちょっとした variant として,

i) n 組の括弧の付け方, 例えば $n = 3$ の時、上の語に対応させると

$$()()(), \qquad ()(()), \qquad (()()), \qquad (())(), \qquad ((())),$$

または,

ii) 点 $\bullet$ を $(0,0)$ から (n,n) に, $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 | i \ge j\}$ 上を 2 種類の移動, $(i,j) \mapsto (i+1,j)$ 及び $(i,j) \mapsto (i,j+1)$, を組み合わせる事により, 行き着く方法

も同じ場合の数を与える事は, 簡単に分かる.

2. **Binary Tree**　これは, 連結な cycle を持たないグラフで, 各頂点に出入りする辺の数が 3 を超えないものを云う. n 個の頂点を持つ binary tree の個数は Catalan 数 C_n で与えられる事が知られている.

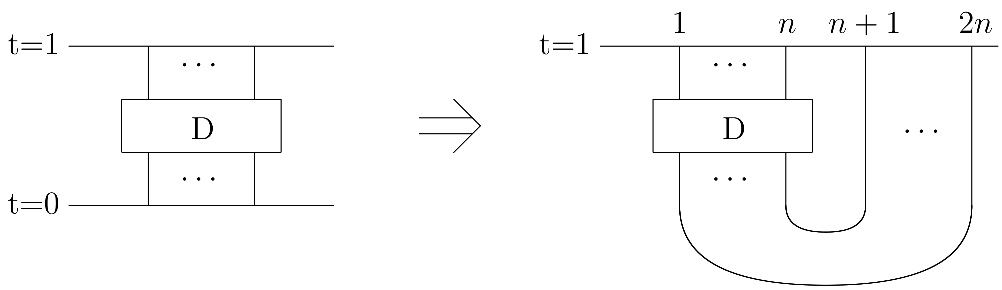
3. 正多角形の三角形分割　正 $(n+2)$-角形の頂点を適当に結んで出来る三角形分割の仕方は全部で C_n 通りある事が知られている.

問題 1.6. 上で述べた事の内, 少なくとも 1 つ以上に対して証明を与えよ. (*cf.* 上記 *ii*) に対し, その場合の数を計算すると $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ という表示を得, *Catalan* 数が整数であることが分かる.)

さて、この様な特殊な数列を持ち出したのは、実は次の命題が成り立つからである:

命題 1.1. $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ とし, $\delta \in \mathbb{C}^*$ とする．このとき、*Temperley-Lieb* 代数 $TL_n(\delta)$ の次元は n 次の *Catalan* 数 C_n で与えられる．

証明. (概略) §1.1.1 でみたように, Temperley-Libe 代数 $TL_n(\delta)$ は単純 n-図式で生成されるので、単純 n-図式の同値類の個数を数えれば良い．
そこで, まずは単純 n-図式に対し, その端点が $\{(i,1) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \le i \le 2n\}$ で与えられるような図式を考える:



この様にして得られた図式の端点 $\{(i,1) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \le i \le 2n\}$ は互いに交わらない半円 の端点からなっているが, この時, 点 $(i,1)$ が半円の左側の端点なら $w_i = L$, 右側なら $w_i = R$ とおくと, 文字 L, R からなる長さが $2n$ の語 $w = w_1 w_2 \cdots w_{2n}$ が定まる．この語が Dyck 語 となっていることが確かめられる．また、この様にして出来た単純 n-図式の集合と長さが $2n$ の Dyck 語の集合の間の対応は全単射になっている事が示され, 証明が完了する． □

1.3 半単純性 & Jones-Wenzl 冪等元

ここでは, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ の半単純性について議論する．ここで, $q \in \mathbb{C}^*$ は $\delta = -(q + q^{-1})$ を満たすようなものを一つ選び, これを固定する (cf. 定理 1.1.)

基本的な考え方は, もし適当な性質を持つ非退化な双一次形式が $TL_n(\delta)$ 上に定まれば、これは半単純である, と云える．逆は必ずしも正しくない事に注意しておく．そこで, 以下では $TL_n(\delta)$ 上にこの良い性質を持つ双一次形式を定め, それを用いて $TL_n(\delta)$ の半単純性について議論する．

1.3.1 Jones' trace form

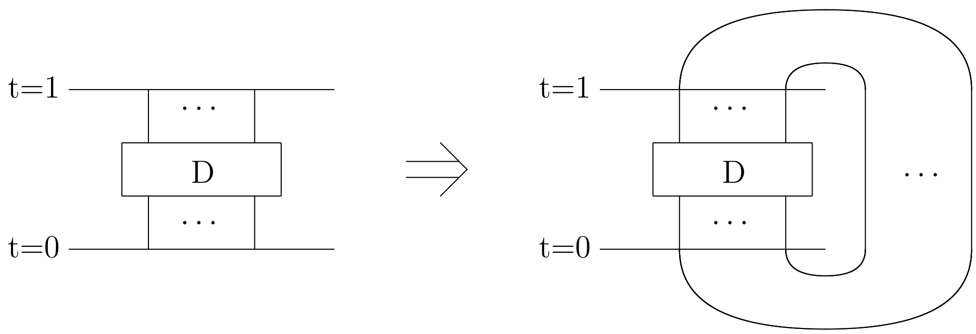
以下, $q^2 \neq -1$ とする．このとき, V. Jones [J1] は以下の性質を満たす写像 $\mathrm{tr} : TL_n(\delta) \to \mathbb{C}$ の存在を示した:

1. $\mathrm{tr}(1) = 1$,

2. $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$,

3. $\mathrm{tr}(xf_i) = -(q+q^{-1})^{-1}tr(x) \qquad x \in TL_{i-1} \subset TL_i \subseteq TL_n$.

これは, Jones' form とよばれ, 以下の様に構成される. 条件 1. は normalization の問題なので, 気にしなくてもよく, この normalization を除くと, 実は以下の上にして計算されるものである: 単純 n-図式 D に対し,



なる操作を施し, $\mathrm{tr}(D) = \delta^{\text{出来た円の個数}}$ と定義する, と言いたいところではあるが, 条件 1. より右辺を少し修正し, $\mathrm{tr}(D) = \delta^{\text{出来た円の個数}-n}$, と置けばよい.

この双一次形式を用いて定義される Hermite 形式 (あるいは双一次形式)[2] は generic には非退化である事が知られている:

定理 1.2 (cf. [GL2]). *この $TL_n(-(q+q^{-1}))$ 上の trace form が非退化な為の必要十分条件は, q^2 が 1 の冪根でないか, 或いは, q^2 が 1 の原始 l 乗根 $(l \geq 3)$ であり, かつ $n \leq l-2$ を満たす場合に限る.*

従って, q^2 が 1 の原始 l 乗根であり, かつ $n \leq l-2$ ならば, $TL_n(\delta)$ は半単純である. 実は、この逆は成り立っていない:

命題 1.2 (cf. 補注 3.8 in [GL2]). *q^2 が 1 の原始 l 乗根 $(l \geq 3)$ であるとする. このとき, $TL_n(-(q+q^{-1}))$ が半単純である事の必要十分条件は $n \leq l-1$ となる事である.*

つまり, $n = l-1$ の場合が特殊な状況である.

[2]単純 n-図式 D_1, D_2 に対し, $(D_1, D_2) := \mathrm{tr}(D_1^* \circ D_2)$ と置けば良い.

1.3.2 Jones-Wenzl 冪等元

ここでは, q^2 は 1 の原始 l 乗根であるとする．このとき, Jones' form は退化する．そこで, Jones' form の誘導する Hermite 形式（双一次形式）の Radical (根基）が非自明になるのだが、これは $TL_n(\delta)$ の特別な元で生成される ideal となることが知られている:

定理 1.3 (cf. [J3]). *q^2 は 1 の原始 l 乗根 $(l \geq 3)$ であるとする．このとき,*

1. *$E_{l-1} \in TL_{l-1}$ であって, $f_i E_{l-1} = E_{l-1} f_i = 0 \;\; (1 \leq i \leq l-2)$ を満たす冪等元が存在する．この E_{l-1} を Jones-Wenzl 冪等元 という．*
2. *$n \geq l-1$ の時, 上で述べた Jones' form の誘導する Hermitian 形式（双一次形式）の Radical R_n は $E_{l-1} \in TL_{l-1} \subset TL_n$ で生成される両側 ideal である．*

例 1.1. *$l=3$ の時, $E_2 = 1 + f_1$ となり, $l=4$ の時, $E_3 = 1 + \sqrt{2}(f_1+f_2) + f_1f_2 + f_2f_1$ となる．*

なお一般の $l \geq 3$ に対し、その explicit な表示は知られている (cf. [GL2]).

2 Cellular 代数

ここでは, J. J. Graham と G. I. Lehrer [GL1] によって導入された cellular 代数とよばれる代数を定義し, その諸性質をざっと述べる事にする．詳しくは原論文 [GL1] を参考の事.

2.1 定義と例

ここでは, R を単位元を持つ可換環とする.

2.1.1 定義

定義 2.1. *R 上の cellular 代数 A とは, 以下の性質を満たす 4 つ組 $(\Lambda, M, C, *)$ (cell data と呼ばれる）を云う:*

(*C1*) Λ は半順序集合である．また,

i) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し,（*type* λ の *tableau* の集合）$M(\lambda)$ は有限集合であり,

ii) 写像 $C : \amalg_{\lambda\in\Lambda} M(\lambda)\times M(\lambda)\to A$ は単射であり, その像は A の R-基底を与える.

(*C2*) $\lambda\in\Lambda$ 及び $S,T\in M(\lambda)$ に対し, $C^\lambda_{S,T}=C(S,T)\in A$ とおく. このとき, $*: A\to A$ は R-線形な *anti-involution* であって, $(C^\lambda_{S,T})^*=C^\lambda_{T,S}$ を満たす.

(*C3*) $\lambda\in\Lambda$ 及び $S,T\in M(\lambda)$ とする. このとき, 任意の $a\in A$ に対し, 以下が成り立つ*:*

$$aC^\lambda_{S,T}\equiv\sum_{S'\in M(\lambda)} r_a(S',S)C^\lambda_{S',T}\pmod{A(<\lambda)}.$$

但し, $r_a(S',S)\in R$ は T に依らなず, $A(<\lambda)$ は $\{C^\mu_{S'',T''}|\mu<\lambda,\ S'',T''\in M(\mu)\}$ で生成される A の R-部分加群を表すものとする.
この等式の両辺の $*$ による像を考える事により, 次の同値な等式を得る*:*

(*C3*)$'$

$$C^\lambda_{T,S}a^*\equiv\sum_{S'\in M(\lambda)} r_a(S',S)C^\lambda_{T,S'}\pmod{A(<\lambda)}.$$

上の公理系は, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ を勉強すると出て来る, 所謂 Robinson-Schensted 対応 を念頭に置いている事は想像に難くない.

2.1.2　例

最初の例は, 想像通りのあの代数:

1. A_{n-1}**-型** $(n>1)$ **の岩堀 Hecke 代数**　都合上, 定義 1.2 とは normalization を少し変える. $H^{\mathbb{Z}}_n(q)$ を, $T_1,T_2,\cdots,T_{n-1}$ で生成され, 以下の基本関係式を満たす $R=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ (q: 不定元) 上の代数とする:

$$\begin{aligned}&(T_i-q)(T_i+1)=0\qquad 1\le i<n,\\&T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1}\qquad 1\le i<n-1,\\&T_iT_j=T_jT_i\qquad |i-j|>1,\end{aligned}$$

を満たすものを云う.

補足 2.1. $1\le i<n$ に対し, $\sigma_i=(i,i+1)$ とおくと, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は生成系 $S=\{\sigma_i|i=1,\dots,n-1\}$ とする *Coxeter* 群 となっている. $w\in\mathfrak{S}_n$ に対し,

$w = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ と書ける様な最小の整数 k を w の長さ と云い $l(w)$ と記す. また, このときの表示 $w = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ を 簡約表示 と云う.

そこで, $1 \leq i < n$ に対し, $T_{\sigma_i} = T_i$ と置き, 一般の $w, w' \in W$ が $l(ww') = l(w) + l(w')$ を満たしている時, $T_{ww'} = T_w T_{w'}$ と定義する. このとき, 岩堀 *Hecke* 環 $H_n^{\mathbb{Z}}(q)$ は R 上 $\{T_w\}_{w\in\mathfrak{S}_n}$ で生成される *free-module* である; $H_n^{\mathbb{Z}}(q) = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]T_w$.

問題 2.1. $\zeta \in \mathbb{C}^*$ とし, 射 $R \to \mathbb{C}; q \mapsto \zeta^2$ を固定する. このとき, 以下の同型が成り立つ事を示せ: $H_n(\zeta) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} H_n^{\mathbb{Z}}(q)$ (cf. 定義 1.2).

R 上の involution $\overline{q} = q^{-1}$ は, $H_n^{\mathbb{Z}}(q)$ 上の involution に $\overline{T_w} := T_{w^{-1}}^{-1}$ によって, 拡張される.

問題 2.2. これが実際に *involution* を与えていることを確認せよ.

以上の準備の基で, D. Kazhdan と G. Lusztig [KL] は次の定理を示した:

定理 2.1. 各 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し, 次の条件を満たす $C_w \in H_n^{\mathbb{Z}}(q)$ が唯一存在する:

1. $C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q)T_y$ $(P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q])$ と表示でき, 多項式 $P_{y,w}(q)$ は次を満たす:

   i) $P_{w,w}(q) = 1$,

   ii) $\deg(P_{y,w}(q)) \leq \frac{1}{2}(l(w) - l(y) - 1)$.

   ここで, $y < w$ は *Bruhat* 順序, つまり, 元 w のある簡約表示から幾つかの元を抜くことで元 y 得られる事を示す.

2. $\overline{C_w} = q^{-l(w)}C_w$.

この証明は案外単純な議論で示される. 興味があれば原論文を参照の事.

ここで, $H_n^{\mathbb{Z}}(q)$ の cell 構造について述べよう. (C1) は予想通り: Λ として n の分割の集合を考え, その上に所謂 dominance order をいれる. 念の為に復習しておこう: n の partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ 及び $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l)$ に対し, ある正の整数 i であって $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_j$ $(j < i)$ かつ $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i > \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$ となるものが存在するとき, $\lambda \succ \mu$ と記す. これは, 集合 Λ 上に半順序関係を定める. 次に, $M(\lambda)$ として, shape λ の standard tableau の集合を取る. やはり, 写像 C は Robinson-Schensted 対応 を基に与えられそうである. 実際に $S, T \in M(\lambda)$ とすると

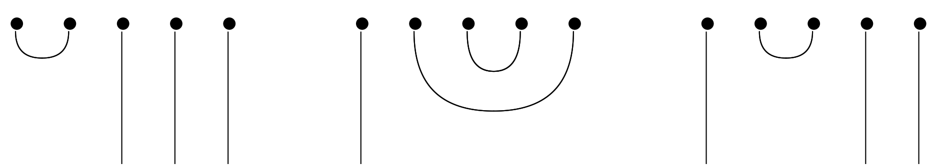
き, 組 (S,T) と Robinson-Schensted 対応で対応する対称群の元を $w \in \mathfrak{S}_n$ とするとき, $C^{\lambda}_{S,T} = C_w$ とおくのである．さて, (C2) であるが, これは, w^{-1} に対応する $M(\lambda)^2$ の元は (T,S) であり, $*(T_w) = T_{w^{-1}}$ を満たす R-線型な anti-involution $*$ は $*(C^{\lambda}_{S,T}) = C^{\lambda}_{T,S}$ を満たす事から確認出来る．(C3) を示す事は少々厄介であり, [KL] では implicit である．因みに, その詳細は G. Williamson の学部の卒業論文 [Wi] で与えられている．

問題 2.3. *以上の事実, 特に, (C1) 及び (C2), を厳密に示せ.*

次の例は, 今回の話の主役:

<u>2. **Temperley-Lieb 代数** $TL_n(\delta)$</u>　R を単位的可換環とし, $\delta \in R$ とする．Temperley-Lieb 代数 $TL_n(R,\delta)$ とは, 単純 n-図式の生成する R-自由加群に積構造を §1.1.1 の様に与える．唯一の違いは, δ はここでは R の元の一つ, という事だけである．

ここで, $TL_n(R,\delta)$ の Cell 構造について述べよう．まずは (C1) について．$\Lambda = \mathcal{T}(n) := \{t \in \{0,1,\dots,n\} | n-t \in 2\mathbb{Z}\}$ とおく．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, λ 個の固定点をもつ planar involution なるものを導入する．まず, involution とは, ある直線上に並べられた n 点からなる集合で, $n-\lambda$ 個の点は pair を組み λ 個の点は単独で存在させるものである: つまり, 分割 $(1^{\lambda}2^{\frac{n-\lambda}{2}})$ に対応する n 点の組分けを行ったものである．この involution が planar であるとは, この直線を境界とする半平面上に, この組になっている数を曲線で結び, 単独の点からは半直線を描いたときに, これらが互いに交わらない様に出来る事を云う．以下にいくつかの例を示す:



S_1　　S_2　　S_3

このとき, 固定点の個数が λ の planar involution 全体の集合を $M(\lambda)$ とすると, 集合 $M(\lambda)$ と分割 $(1^{\lambda}2^{\frac{n-\lambda}{2}})$ に対応する 2 行からなる Young 図形に対する standard tableaux の集合の間には全単射な対応が存在する. (各 pair に対し, 右端の数字を 2 行目に記す.)

問題 2.4. 上の *planar involution* の 3 つの例 S_1, S_2, S_3 に対し, 夫々対応する *standard tableaux* を与えよ.

また, 2 つの固定点の個数が λ の planar involution S, T に対し, S と T の上下を反転して得られるものを繋いで出来る単純 n-図式を対応させる写像を C とすると, (C1) は確認出来る. また, (C2) は anti-involution $*$ は単純 n-図式 D に対し, 直線 $t = \frac{1}{2}$ に関して対称な単純 n-図式 D^* を対応させる事によって得られる. (C3) は図式による考察から従う.

問題 2.5. 上で述べた事を厳密に示せ.

2.2 表現の構成

ここでは, (C3) 及び (C3)' を用いて, cell 表現とよばれる表現の一般的な構成を与える.

2.2.1 前座

$(\Lambda, M, C, *)$ を単位的可換環 R 上の cellular algebra A の cell data とする. Λ の部分集合 Λ' に対し, $\{C^{\lambda}_{S,T} | \lambda \in \Lambda', S, T \in M(\lambda)\}$ によって生成される A の R-部分加群を $A(\Lambda')$ と記す. このとき, (C3) 及び (C3)' より, 以下の補題が成り立つ:

補題 2.1. Φ を Λ の *ideal,* つまり $\phi \in \Phi$ かつ $\lambda \in \Lambda$ が $\lambda \leq \phi$ を満たすなら必ず $\lambda \in \Phi$ を満たす, とする. このとき, $A(\Phi)$ は A の両側 *ideal* である.

定義 2.2. $\Phi' \subseteq \Phi$ を Λ の *ideal* とする. このとき, $Q(\Phi \setminus \Phi')$ でもって (A, A)-加群 $A(\Phi)/A(\Phi')$ を表すものとする.

勿論 (A, A)-加群 $Q(\Phi \setminus \Phi')$ は差集合 $\Phi \setminus \Phi'$ のみに依り, Φ 及び Φ' の選び方には依らない. また, 定義より, R-加群の単射 $Q(\Phi \setminus \Phi') \hookrightarrow A$ が存在し, その像は R-加群 $A(\Phi \setminus \Phi')$ と同型である. 以下に於いて, $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A(\{\lambda\})$ や $Q(\{\lambda\})$ が良く用いられる.

補題 2.2. $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$ とする. このとき, 任意の $S_1, S_2, T_1, T_2 \in M(\lambda)$ に対し, 以下が成り立つ:

$$C^{\lambda}_{S_1,T_1} a C^{\lambda}_{S_2,T_2} \equiv \phi_a(T_1, S_2) C^{\lambda}_{S_1,T_2} \mod A(< \lambda).$$

但し, $\phi_a(T_1, S_2) \in R$ は T_1, S_2 及び a にのみ依存する.

<u>証明</u>. Cell 代数 A は $\{C^\lambda_{S,T} |\, \lambda\in\Lambda,\ S,T\in M(\lambda)\}$ で張られる R-自由加群であることを思い出そう. 後は, $(C^\lambda_{S_1,T_1}a)C^\lambda_{S_2,T_2}$ に (C3) を適用し, $C^\lambda_{S_1,T_1}(aC^\lambda_{S_2,T_2})$ に (C3)' を適用すればよい. □

さて、少し毛色の異なる概念を導入する. $\sigma : R\to R'$ を単位的可換環の射とすると R' には R-加群の構造が入る. このとき, R'-代数 $A^\sigma := R'\otimes_R A$ を A の σ による specialization という.

問題 2.6. *R-代数 A が cell 構造を持つ時, R'-代数 A^σ も自然な cell 構造を持つ事を確かめよ.*

2.2.2 Cell 表現

さて, いよいよ cellular 代数 A の cell 表現なるものを導入し, その構造を調べる為の大事な道具を導入する.

定義 2.3. $\lambda\in\Lambda$ に対し, A-加群 $W(\lambda)$ を以下で定める. $W(\lambda)$ は $\{C_S|S\in M(\lambda)\}$ の生成する R-自由加群であり, (左) A-加群の構造を

$$aC_S = \sum_{S'\in M(\lambda)} r_a(S',S)C_{S'}$$

によって定める. 但し, $r_a(S',S)$ は公理 (*C3*) に現れるものである. この表現を A の λ に対する *cell 表現* と云う.

問題 2.7. これが実際に $W(\lambda)$ 上に A-加群の構造を与えている事を確認せよ.

さて, $W(\lambda)$ 上に 'anti-involution $*$ と compatible な' 右 A-加群の構造を次で導入する:

$$C_Sa = \sum_{S'\in M(\lambda)} r_{a^*}(S',S)C_{S'}.$$

特に, この作用によって $W(\lambda)$ を右 A-加群とみなす時, $W(\lambda)^*$ と記す事にする. 以上の準備の基で, 以下の補題は簡単な (?) 練習問題:

補題 2.3. *1.* 各 $\lambda\in\Lambda$ に対し, 自然な R-加群の射 $C^\lambda : W(\lambda)\otimes_R W(\lambda)^*\to A(\lambda); (C_S, C_T)\mapsto C^\lambda_{S,T}\ \ (S,T\in M(\lambda))$ が存在する. 同一視 $A(\lambda)\to Q(\{\lambda\})$ の基で, C^λ は (A,A)-両側加群の同型を与える.

2. $A=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A(\{\lambda\})$ (R-加群としての直和).

3. $a\in A(\{\lambda\})$ とし, $S,T\in M(\mu)\quad(\lambda,\mu\in\Lambda)$ とすると, $\lambda\geq\mu$ でなければ, $r_a(S,T)=0$ となる.

さて, ここで以下大事になる道具は以下の双一次形式である：

定義 2.4. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, 双一次形式 $\phi_\lambda : W(\lambda) \times W(\lambda) \to R$ を $\phi(C_S, C_T) := \phi_1(S,T) \quad (S,T \in M(\lambda))$ で定め (補題 2.2 を参照の事), これを双線型に拡張する.

この双一次形式の基本的な性質は以下の通り:

命題 2.1. $\lambda \in \Lambda$ とする.

1. 双一次形式 ϕ_λ は対称である, つまり, 任意の $x, y \in W(\lambda)$ に対し, $\phi_\lambda(x,y) = \phi_\lambda(y,x)$ が成り立つ.

2. 任意の $x, y \in W(\lambda)$ 及び $a \in A$ に対し, 以下が成り立つ:
$$\phi_\lambda(a^* x, y) = \phi_\lambda(x, ay).$$

3. 任意の $x, y, z \in W(\lambda)$ に対し, 以下が成り立つ:
$$C^\lambda(x \otimes y)z = \phi_\lambda(y,z)x.$$

証明. (概略) 補題 2.2 及び定義 2.4 より, 双一次形式 ϕ_λ は以下の方程式で定まる事が従う:

$$C^\lambda_{S_1,T_1} C^\lambda_{S_2,T_2} \equiv \phi_\lambda(C_{T_1}, C_{S_2}) C^\lambda_{S_1,T_2} \mod A(< \lambda) \qquad (S_i, T_i \in M(\lambda)). \quad (1)$$

1. これは (1) に anti-involution $*$ を適用すれば良い.

2. Φ_λ, R_a を夫々, 基底 $\{C_S | S \in M(\lambda)\}$ に関する ϕ_λ 及び r_a の行列表示とするとき, ${}^t R_{a^*} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda R_a$ が成り立っている. 実際, $a \in A$, $S, T \in M(\lambda)$ とし, $(C^\lambda_{S,S} a) C^\lambda_{T,T} = C^\lambda_{S,S}(a C^\lambda_{T,T})$ の両辺を夫々 (C3)' , (C3) 及び (1) を用いて計算すればよい.

3. 問題の等式の両辺は x, y, z に関して線型ゆえ, $x = C_S$, $y = C_T$, $z = C_U$ ($S, T, U \in M(\lambda)$) に対し問題の等式を示せば良い. 定義より, 以下の等式を得る:
$$C^\lambda(C_S \otimes C_T) C_U = C^\lambda_{S,T} C_U = \sum_{V \in M(\lambda)} r_V C_V.$$
但し, $r_V = r_{C^\lambda_{S,T}}(V, U)$ は積 $C^\lambda_{S,T} C^\lambda_{U,U'}$ $(U' \in M(\lambda))$ を (C3) を用いて計算した結果の $C^\lambda_{V,U'}$ の係数である. 一方, 補題 2.2 より,
$$C^\lambda_{S,T} C^\lambda_{U,U'} \equiv \phi_1(T,U) C^\lambda_{S,U'} \mod A(< \lambda),$$
と書ける. このことから, 定義 2.4 より, $r_V = \delta_{V,S} \phi_\lambda(C_T, C_U)$ となる. $\square$

以下は, この命題の簡単な系:

系 2.1. *$z \in W(\lambda)$ に対し, R_z を以下で定義される R の ideal とする:*

$$R_z := \{\phi_\lambda(y,z) | y \in W(\lambda)\}.$$

このとき,

1. *$a \in A$ とすると, $R_{az} \subseteq R_z$.*
2. *$Az \supseteq R_z W(\lambda) = A(\{\lambda\})z$. 特に, $R_z = R$ ならば, $W(\lambda) = Az$ となっている.*

証明. 1. これは明らか.

2. 命題 2.1 の 3. より, $A(\{\lambda\})z$ は $\phi_\lambda(y,z)x$ なる形の元からなる. 更に $R_z = R$ ならば, $RW(\lambda) = W(\lambda)$ となっている. □

これらを用いて示される, 以下の鍵となる命題を引用する:

命題 2.2 (Prop. 2.6 in [GL1]). *$\lambda, \mu \in \Lambda$ とし, $\theta : W(\lambda) \to W(\mu)/W'$ を A-加群の射とする. 但し, W' は $W(\mu)$ の或る A-部分加群とする. さて, $W(\mu)/W'$ は R-自由加群であり且つ $\phi_\lambda \neq 0$ と仮定する. このとき,*

1. *$\lambda \geq \mu$ でなければ, $\theta = 0$ となる.*
2. *$\lambda = \mu$ ならば, 或る $r_0 \neq 0$ 及び $r_1 \in R$ であって, 任意の $x \in W(\lambda)$ に対し, $r_0\theta(x) = r_1 x + W'$ が成り立つ.*

また系として, 以下の Schur の補題の類似が成り立つ:

系 2.2. *$\lambda \in \Lambda$ とし, $\phi_\lambda \neq 0$ とする. R が整域ならば, $\mathrm{End}_A(W(\lambda)) \cong R$.*

さて, 次に, R は可換体でありかつ全ての A-加群は R-上有限次元である, と仮定する. このとき, $\lambda \in \Lambda$ に対し,

$$\mathrm{rad}(\lambda) := \{x \in W(\lambda) | \phi_\lambda(x,y) = 0 \ \forall y \in W(\lambda)\}$$

と置く. このとき、以下の命題が成り立つ:

命題 2.3 (cf. 命題 3.2 in [GL1]). *$\lambda \in \Lambda$ とする. このとき,*

1. *$\mathrm{rad}(\lambda)$ は $W(\lambda)$ の A-部分加群である.*

2. $\phi_\lambda \neq 0$ ならば, 商加群 $W(\lambda)/\mathrm{rad}(\lambda)$ は絶対既約 である.

3. $\phi_\lambda \neq 0$ ならば, $\mathrm{rad}(\lambda)$ は A-加群 $W(\lambda)$ の *radical*, つまり $W(\lambda)$ の $\mathrm{rad}(\lambda)$ による商加群は最小の半単純加群である.

そこで, $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda | \phi_\lambda \neq 0\}$ と置く. また, $\lambda \in \Lambda_0$ に対し, $L_\lambda := W(\lambda)/\mathrm{rad}(\lambda)$ とおく. このとき, 以下の定理が成り立つ:

定理 2.2 (cf. 定理 3.4 in [GL1])**.** *絶対既約な A-加群 V に対し $V \cong L_\lambda$ となるような $\lambda \in \Lambda_0$ が唯一つ存在する.*

ここまでは, 対称双一次形式 ϕ_λ の性質に関する比較的一般的な話であるが, cellular 代数 A の射影加群についても, 幾つかの大事な性質が知られている. 例えば, 単純 Lie 環を含む少し一般的な Lie 環に対し, 所謂 BGG duality と呼ばれるものが知られているが、その類似が cellular 代数 A についても示される. この事から decomposition matrix と呼ばれるものが計算出来るが, こういった性質を含め, 原論文 [GL1] は一見の価値がある.

3 Temperley-Lieb 代数の表現

ここでは, Temperley-Lieb 代数の cell 表現の単純 n-図式を用いた表示について紹介する. これを用いて, いくつかの性質を調べてみよう.

3.1 Cell 表現

ここでは, Temperley-Lieb 代数の Cell 表現を diagram の言葉で実現し, その上に標準的に定まる双一次形式について述べる.

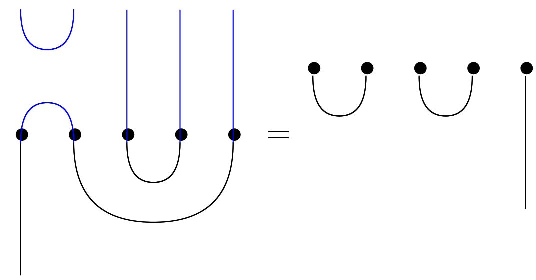
3.1.1 Planar involution による実現

§2.1.2 で見たように, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ $(t \in \mathcal{T}(n))$ の cell 構造を parametrize する集合は $\Lambda = \mathcal{T}(n) = \{t \in \{0,1,\ldots,n\} | n-t \in 2\mathbb{Z}\}$ であり, 各 $t \in \mathcal{T}(n)$ に対し, $M(t)$ は固定点の個数が t の planar involution 全体のなす集合であった. 従って, §2.2 で見たように, cell 表現 $W_t(n)$ は $M(t)$ で張られるベクトル空間の上に実現される 左 $TL_n(\delta)$-加群だと思える. 勿論、加群の構造は単純図式の積構造 (cf. §1.1.1) と同様に定義される.

問題 3.1. *$W_t(n)$ の左 $TL_n(\delta)$-加群の構造を与えよ.*

参考の為, 例えば $n=5$ で $t=1$ の場合, §2.1.2 で扱った planar involution S_2 に対し, $e_1.S_2$ は次の様にして計算される:

$e_1.S_2 =$



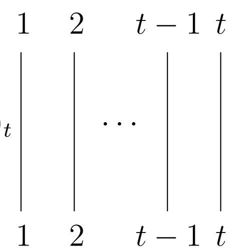
同様に, $e_2.S_2 = e_4.S_2$ 及び $e_3.S_2 = \delta S_2$ 等が確認できる. (各自, 確かめよ.)

3.1.2 $W_t(n)$ 上の反変双一次形式

さて, $t \in \mathcal{T}(n)$ に対し, cell 表現 $W_t(n)$ の上には標準的な双一次形式 $(\cdot,\cdot)_t$ が入ることは一般論から保証されているが、これは具体的には以下の様に構成される.

D_1, D_2 を固定の個数が t の planar involution とするとき, 積 $D_1^* \circ D_2$ は単純 t-図式の適当な線型結合と思える. このとき,

$D_1^* \circ D_2 \;=\; (D_1, D_2)_t$



$+$ (その他の項)

となるような反変双一次形式 $(\cdot,\cdot)_t$ が存在する. その反変性から, その radical

$$\mathrm{Rad}\,(\cdot,\cdot)_t := \{x \in W_t(n) |\, (x,y)_t = 0\ \forall y \in W_t(n)\}$$

は $W_t(n)$ の部分加群をなす. また, 命題 2.3 より, その商加群 $L_t(n) := W_t(n)/\mathrm{Rad}\,(\cdot,\cdot)_t$ は既約であり, 定理 2.2 より, 任意の既約加群はある $L_t(n)$

と同型である. そこで, 今度は双一次形式 $(\cdot,\cdot)_t$ が何時退化するか? という事が問題になるが, これについてはその Gram 行列 の行列式が計算されており (cf. [GL2]), その結果を次の部分節で述べる.

3.2 退化している場合

命題 1.2 で見たように, q^2 が 1 の冪根でないか或いは q^2 が 1 の原始 l-乗根 ($l \geq 3$) でありかつ $n \leq l-1$ であることが, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ ($\delta = -(q+q^{-1})$) が半単純である為の必要十分条件であった. よって, これらの条件が満たされているときは, cell 表現 $W_t(n)$ は既約であることは想像に難くない. 実際 G. I. Lehrer 及び J. J. Graham [GL2] は以下の結果を得ている (cf. [ALZ] も参照の事):

定理 3.1 (cf. 命題 2.2)**.** *q^2 は 1 の原始 l-乗根 ($l \geq 3$) であると仮定する. また, 整数 $n \geq l$ を固定する. $\mathbb{N}' = \{i \in \mathbb{Z}_{>0} | i \not\equiv -1 \,(\bmod l)\}$ とし, 写像 $g : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ を以下で定義する: $t = al+b \in \mathbb{N}'$, $0 \leq b \leq l-2$ に対し, $g(t) := (a+1)l + l - 2 - b$. この時, $g(t) - t = 2(l-1-b)$ ゆえ, $g(t) \geq t+2$ かつ $g(t) \equiv t \,(\bmod 2)$ となっている.*

1. *$t \in \mathcal{T}(n) \cap \mathbb{N}'$ かつ $g(t) \in \mathcal{T}(n)$ なる場合, 非自明な射 $\theta_t : W_{g(t)}(n) \to W_t(n)$ が存在する. また, 任意の $TL_n(\delta)$ の cell 表現の間の非自明な射は必ずこの様に書ける.*

2. *$t \in \mathcal{T}(n) \cap \mathbb{N}'$ かつ $g(t) \in \mathcal{T}(n)$ なる場合, cell 表現 $W_t(n)$ の組成因子は $L_t(n)$ 及び $L_{g(t)}(n)$ であり, 夫々の重複度は 1 である. その他の全ての $TL_n(\delta)$ の cell 表現は既約である.*

3. *$l \geq 3$ ならば, 全ての加群 L_t ($t \in \mathcal{T}(n)$) は非自明な既約加群であり, これらは $TL_n(\delta)$ の既約表現の同型類の完全代表系を与えている.*

3.3 Schur-Weyl Duality I

ここでは, Temperley-Lie 代数 $TL_n(-(q+q^{-1}))$ と量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の間に成り立つ Schur-Weyl dualtiy について, 簡単に触れる.

3.3.1 Prototype

ここでは, 簡単に古典的に知られている話について, さらっと復習する. 詳細は例えば [Iw] 等を参照せよ.

W を可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 vector space とする. このとき, 以下の命題は double centralizer (或いは commutant) theorem と呼ばれる重要な結果であり, Artin-Wedderburn の定理 (cf. 定理 0.3) の美しい応用の一つである:

命題 3.1. *$A \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ を半単純代数とし, $A' = \{b \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W) \,|\, ab = ba \,\forall\, a \in A\}$ を A の centralizer (或いは commutant) とする. このとき,*

1. *A' は半単純で, $(A')' = A$ を満たす.*

2. *W は $A \otimes A'$-加群として, 以下の様な一意的な既約分解を持つ: $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r, \quad W_i \not\cong W_j \ (i \neq j)$. この分解は A-加群及び A'-加群としての isotypic decomposition を与える.*

3. *各 W_i は $U_i \otimes_{D_i} U_i'$ の形で書ける. 但し, U_i は単純 A-加群, U_i' は単純 A'-加群, D_i は $\mathbb{K}$ 上の可除環 $\mathrm{End}_A(U_i)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_{A'}(U_i')^{\mathrm{op}}$ である.*

これを以下の特別な場合に適用する: $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする. V を $\mathbb{K}^n$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ とし, $W = V^{\otimes m}$ とする. V は自然に $GL(V)$-加群の構造を持ち, その構造は W の $GL(V)$-加群の構造を誘導する; $g.(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots v_m) := (g.v_1) \otimes (g.v_2) \otimes \cdots \otimes (g.v_m)$. また, W 上には自然に対称群 $\mathfrak{S}_m$ が各成分の置換で作用する. このとき, Maschke の定理 (cf. 定理 0.4) より, $A := \mathbb{K}[\mathfrak{S}_m] \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ は半単純である. 実は A の commutant A' は $GL(V) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ の生成する半単純代数であることが分かる. この A' を $\langle GL(V) \rangle$ と記す. つまり, この状況下で以下の補題が成り立つ:

補題 3.1. *$\mathrm{End}_{\mathbb{K}[\mathfrak{S}_m]}(V^{\otimes m}) = \langle GL(V) \rangle$ かつ $\mathrm{End}_{\langle GL(V) \rangle}(V^{\otimes m}) = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_m]$ が成り立つ.*

上の定理の 2 番目の主張に対応する事実は, 今の場合, 以下の様に書ける.

定理 3.2. *$m \leq n$ とする. このとき, $W = V^{\otimes m}$ は $\mathfrak{S}_m \times GL_n$-加群として, 以下の分解を持つ:*

$$V^{\otimes m} = \bigoplus_{\lambda} M_\lambda \boxtimes L_\lambda(n).$$

但し, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ かつ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ は m の分割で, M_λ は shape λ の Young 図形で parametrize される $\mathfrak{S}_m$ の既約表現, $L_\lambda(n)$ は highest weight が λ で与えられる GL_n の既約表現である.

これらの 2 つの特殊な場合の結果は Schur-Weyl duality と呼ばれるもので, H. Weyl 流の古典的な不変式論の中で重要な位置を占めている.

3.3.2 量子群 $U_v(\mathfrak{sl}_2)$

ここでは, 簡単の為, $\mathfrak{sl}_2$ に対応する量子群の定義を復習するが、これは一般の 対称化可能な Kac-Moody 代数に対して定義されるものである. 詳しくは, 例えば [Ta] を参照せよ.

量子群 $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ とは, 体 $\mathbb{K} = \mathbb{C}(v^{\frac{1}{2}})$ 上の e, f, t, t^{-1} で生成される Hopf 代数で以下の交換関係を満たすものである:

$$\begin{aligned} &tt^{-1} = t^{-1}t = 1, \\ &tet^{-1} = v^2 e, \qquad tft^{-1} = v^{-2} f, \\ &ef - fe = \frac{t - t^{-1}}{v - v^{-1}}. \end{aligned}$$

またその余積 (coproduct) Δ, 余単位元 (counit) ε 及び対合射 (antipode) a は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} &\Delta(t^{\pm 1}) = t^{\pm 1} \otimes t^{\pm 1}, \qquad \Delta(e) = e \otimes t + 1 \otimes e, \qquad \Delta(f) = f \otimes 1 + t^{-1} \otimes f, \\ &\varepsilon(t^{\pm 1}) = 1, \qquad \varepsilon(e) = 0, \qquad \varepsilon(f) = 0, \\ &a(t^{\pm 1}) = t^{\mp 1}, \qquad a(e) = -et^{-1}, \qquad a(f) = -tf. \end{aligned}$$

補足 3.1. *一般に, 単位的可換環 A 上の Hopf 代数 H とは, A-代数 H (その積構造を μ と記す), A-代数の射 $\Delta : H \to H \otimes_A H$ 及び $\varepsilon : H \to A$, A-代数の反変射 $a : H \to H$[3] であって, 以下を満たすものを云う:*

1. *(余結合律) $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$,*
2. *(余単位律) $\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}$,*
3. *(余逆元) $\mu \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes a) \circ \Delta = \varepsilon$.*

但し, $A \hookrightarrow H$ によって A は H の部分代数とみなしている.

こういう定義をみると, 何だかおどろおどろしいものを感じるかも知れないが, $\mathfrak{sl}_2$ を良く知っていると, そんなにたいそうなものでは無い. ここでは、その事を感じてもらう為, $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現について見てみよう.

まずは記号から. $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$[n]_v := \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}}$$

[3] A-線型な写像であって $a(xy) = a(y)a(x)$ を満たすもの

と置き, これを v-整数 と呼ぶ (cf. 問題 1.3). 勿論, $\lim_{v\to 1}[n]_v = n$ なので, こう呼ぶのは自然なのである. さて, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $V(N)$ を $\{u_i\}_{0\leq i\leq N}$ で生成される $\mathbb{K}$-vector space とする. $V(N)$ 上に $U_v(\mathfrak{sl}_2)$-加群の構造を次の様にして入れる: $0 \leq i \leq N$ に対し,

$$t^{\pm 1}.u_i = v^{\pm(N-2i)}u_i, \qquad f.u_i = [i+1]_v u_{i+1}, \qquad e.u_i = [N+1-i]_v u_{i-1}.$$

但し, 便宜上 $u_{-1} = u_{N+1} = 0$ と置く.

問題 3.2. これが表現の構造を与えていることを確認せよ.

また, 余積 Δ を用いると, 体 $\mathbb{K}$ 上の表現 V, W に対し $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ にも自然に表現の構造が入る: $x.(u\otimes w) := \sum_i (x_1^i.u \otimes x_2^i.w) \quad (\Delta(x) = \sum_i x_1^i \otimes x_2^i)$.

この定義により少し真面目に計算すると, (おそらく) 馴染み深いものが得られる

問題 3.3 (Clebsch-Gordan rule)**.** *$M, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. このとき, 以下の同型を示せ:*

$$V(M)\otimes V(N) \cong \bigoplus_{\substack{|M-N|\leq i\leq M+N \\ i\equiv M+N \pmod 2}} V(i).$$

こういうのを見ると, $\mathfrak{sl}_2$ の場合とほとんど同じ様に思うであろう. v を不定元と見なしている限り, その直感は正しい. しかし, $q \in \mathbb{C}^*$ に対し, 特殊化 $v^{\frac{1}{2}} \mapsto q^{\frac{1}{2}}$ を行うと, 場合によってはかなり面白い事が起こる. この特殊化によって得られる代数を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と記す. 実は, q が 1 の冪根でなければ $\mathfrak{sl}_2$ の表現とほぼ同じなのであるが, q が 1 の冪根の場合, 色々と不思議な現象が起こる: $\mathfrak{sl}_2$ の正標数の体の上の表現と似た現象が起こる! これらの事を含め, 量子群に興味を持たれたら G. Lusztig による [L] を参照せよ.

3.3.3 Schur-Weyl duality

歴史的には, 岩堀長慶氏が所謂岩堀 Hecke 環の表示を得た 1960 年代から Schur-Weyl duality の相棒 (commutant) を探す, という問題意識を持っていたようであるが, これに具体的な形を与えたのは, 私の元指導教官である, 神保道夫氏の記念碑的な論文の一つ [Ji] である. この結果によって, 量子系の統計物理における可解格子模型の解析をする為に導入された, 量子群の数学における地位も高まったのでは無いか, と想像している.
その結果を一言で述べると, 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_{n+1})$ の自然表現 の m 個の tensor 積の上の作用の commutant として, A_{m-1}-型の岩堀 Hecke 環が作用する, という事である.

さて, その特殊な場合である $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次元表現 $V = V(1)$ を考えよう. このとき, q が 1 の冪根の場合も含めて $\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes n})$ の構造を完全に決定したのは, H. Andersen, G. Lehrer 及び R. Zhang の論文 [ALZ] であり, 彼等によると, 以下の定理が成り立つ:

定理 3.3. $\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V^{\otimes n}) \cong TL_n(-(q+q^{-1}))$.

補足 3.2. 正確には, *G. Lusztig* による $U_v(\mathfrak{sl}_2)$ の $A = \mathbb{Z}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$*-form* $U_A(\mathfrak{sl}_2)$ (*cf.* [*L*]) と呼ばれるものを用いて, $U_A(\mathfrak{sl}_2)$ の *Weyl* 加群 $\Delta_A(1)$ の n 個の *tensor* 積の *commutant* を決定し, その特殊化との可換性を調べている. なお, 各 *Temperley-Lieb* 代数の生成元 f_i の作用は $\check{R}$-行列の適当な定数倍で与えられる.

この定理は, Temperley-Lieb 代数が量子群との関係で自然に現れる対象である, という事を示している.

4 Jones' Quotient

ここでは, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ ($\delta = -(q+q^{-1})$) の上に定まる Jones' form の誘導する双一次形式が退化する場合を扱う. これは, 定理 1.2 より, q^2 が 1 の原始 l-乗根であって, かつ $n \geq l-1$ なる場合である。また, 定理 1.3 よりその radical R_n は Jones' idempotent E_{l-1} の生成する両側 ideal であった. 以下, q^2 は 1 の原始 l-乗根 ($l \geq 3$) であると, 仮定する.

4.1 定義

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 代数 $Q_n(l)$ を以下で定義する:

$$Q_n(l) = \begin{cases} TL_n(\delta) & n < l-1, \\ TL_n(\delta)/R_n & n \geq l-1. \end{cases}$$

このとき, 命題 1.2 及び定理 1.3 より, 代数 $Q_n(l)$ は半単純である. この代数を Jones (projection) algebra または Jones' Quotient, と呼ぶ (cf. [ILZ]). さて, $Q_n(l)$ の半単純性から, やはりその既約表現を書き上げれば, 最初の仕事は終わる.

4.2 既約表現

ここでは, 代数 $Q_n(l)$ の既約表現を $TL_n(\delta)$ の cell 表現の言葉で記述する．

その心は以下の通り．代数 $Q_n(l)$ の表現 V が与えられると, 標準的な射影 $TL_n(\delta) \twoheadrightarrow Q_n(l)$ を経由することにより V は自然に $TL_n(\delta)$ の表現とみなせる．このとき, R_n は V 上自明に作用する事に注意する．逆に, $TL_n(\delta)$ の表現 W であって R_n が自明に作用する様なものには, $Q_n(l)$ の表現の構造が自然に入る．つまり,

$$\text{代数 } Q_n(l) \text{ の表現} \quad = \quad \begin{array}{c} \text{代数 } TL_n(\delta) \text{ の表現であって} \\ \text{Radical } R_n \text{ の作用が自明なもの} \end{array}$$

となっている．ここで, R_n は Jones-Wenzl 冪等元 E_{l-1} で生成される事を思い出すと (cf. 定理 1.3), 右辺の条件は E_{l-1} の作用が自明な事と同値であることが分かる．以下の命題は, 比較的簡単に示される:

命題 4.1 (cf. 命題 7.1 in [ILZ])**.** *$n \geq l-1$ とする．このとき, 任意の単純 $Q_n(l)$-加群は, 上の対応により, $TL_n(\delta)$-加群 $L_t(n)$ $(t \in \mathcal{T}(n))$ であって, $E_{l-1}.L_t(n) = \{0\}$ を満たすものとなる．*

この証明の鍵となる部分は, 上の対応により $Q_n(l)$ の既約表現は $TL_n(\delta)$ の表現として既約になり, 逆に $TL_n(\delta)$ の既約表現であって E_{l-1} が自明に作用するものは, $Q_n(l)$ の表現として既約になる事が従う, という事実である．残りは, 定理 2.2 に任せればよい．

問題 4.1. 上の証明の詳細を与えよ．

この命題を用いると, 以下の定理を得る:

定理 4.1 (cf 定理 7.5 in [ILZ])**.** *任意の単純 $Q_n(l)$-加群は, ある $t \leq l-2$ を用いて $L_t(n)$ の形で書ける．*

そこで, $\mathcal{R}(n) = \mathcal{T}(n) \cap \{t | t \leq l-2\}$ とおく．この証明はそんなに自明では無い．$TL_n(\delta)$ の cell 表現 $W_t(n)$ の上に Jones-Wenzl 冪等元 E_{l-1} がどのように作用するかを良くみる必要がある．

4.3 Schur-Weyl Duality II

さて, §3.3 で見たように, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(-(q+q^{-1}))$ は量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の自然表現 V の n 個の tensor 積の 自己準同型環の中での commutant として捉えられるのであるが, ここでは, Jones' Quotient $Q_n(l)$ を何かの commutant と見れるか？ という問いに対する一つの答えを与える．

4.3.1 Reduced tensor product

本来は, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の Tilting module と呼ばれるものを扱う必要があるのだが, ここでは簡単の為に, これらの用語はなるべく用いず $\mathfrak{sl}_2$ ならではの比較的単純な世界を堪能する事に努める. 詳しくは [A] 及び [ALZ] を参照せよ.

M を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現とする. このとき, M は $\mathrm{tr}(q^{\alpha^\vee})$, quantum dimension と呼ばれる, が 0 となるような最大の部分加群 M_0 と 極大半単純部分加群 $\overline{M}$ との直和に分解される: $M = \overline{M} \oplus M_0$. 以下, 任意の $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現 M に対し, その極大半単純部分加群を $\overline{M}$ と記す. また, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の半単純な表現に現れる既約表現は $\Delta_q(i)(0 \le i \le l-2)$, 但し $\Delta_q(i)$ は $(i+1)$-次元の既約表現で Weyl-加群 と呼ばれるもの, の形で書ける.

そこで, M, N を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の半単純な有限次元表現とするとき, その reduced tensor product $M \underline{\otimes} N$ を以下で定義する:

$$M \underline{\otimes} N = \overline{M \otimes N}.$$

このとき, 全く非自明であるが, $\underline{\otimes}$ は結合法則を満たす (cf. [A]).

少し平べったく $\Delta_q(i)(0 \le i \le l-2)$ について述べると, これは §3.3.2 で述べた $V(i)$ を $v \mapsto q$ なる特殊化して得られるもの, と思って良い. さて, こうなると $0 \le M, N \le l-2$ なる整数に対し, reduced tensor product $\Delta_q(M) \underline{\otimes} \Delta_q(N)$ がどのように書けるかが気になるであろう. 実は, これは以下の記述を持つ:

補題 4.1 (truncated Clebsch-Gordan rule)**.** *M, N を $0 \le M, N \le l-2$ を満たす整数とする. このとき, 以下の同型が存在する:*

$$\Delta_q(M) \underline{\otimes} \Delta_q(N) \cong \Delta_q(|M-N|) \oplus \Delta_q(|M-N|+2) \oplus \cdots \oplus \Delta_q(K).$$

但し, $K = \min\{M+N, 2(l-2)-(M+N)\}$ である.

問題 4.2. この補題の証明を与えよ.

4.3.2 Schur Weyl duality

以上の準備の基で, 今回の一つの主結果を述べる:

定理 4.2 (cf. 命題 8.6 in [ILZ])**.** *$n \in \mathbb{Z}_{>1}$ とする. このとき, 以下の同型が成り立つ:*

$$\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(\Delta_q(1)^{\underline{\otimes} n}) \cong Q_n(l).$$

これは想像出来さえすれば証明はそんなに複雑では無い.

ところで, これらを合わせて眺めてみると, 以下の面白げな事に気が付く. 上で述べた truncated Clebsch-Gordan rule は $A_1^{(1)}$ の level $l-2$ の Fusion algebra の構造そのものである. ある意味で安直な発想かも知れないが, これは Temperley-Lieb 代数或いは Jones' Quotient の level で何らかの意味で Fusion 積が導入出来, しかもその構造は truncated Clebsch-Gordan rule を用いて記述できるものを与えるのでは, と期待させられる. 実際, この妄想はそれなりに意味がある, という事を次節で軽くみてみよう.

5 Fusion 代数

ここでは, まずは対称群の表現を考える時に良くやる事を思い出し, Temperley-Lieb 代数の Fusioin 代数, とよんで良さそうなものを定義する. また, その具体的な構造を明示的に与える.

5.1 誘導表現と Fusion rule

正の整数 N に対し, $\mathcal{C}_N$ を Temperley-Libe 代数 $TL_N(\delta)$ (或いは Jones' Quotient $Q_N(l)$) の有限次元表現のなす Abel 圏とする. 以下, 簡単の為, $\mathcal{A}_N$ は $TL_N(\delta)$ 或いは $Q_N(l)$ を表すものとする.

$m, n \in \mathbb{Z}_{>1}$ とする. このとき, $\mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_n$ から $\mathcal{C}_{m+n}$ への共変函手 $\circ$ を誘導表現を用いて定義する. つまり, $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_m)$, $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_n)$ に対し, その tensor 積 $V \otimes W$ には自然に $\mathcal{A}_m \otimes \mathcal{A}_n$-加群の構造が入る. この事を意識して, $V \otimes W$ の代わりに $V \boxtimes W$ と記す. 埋め込み $\mathcal{A}_m \otimes \mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}_{m+n}$ により, $\mathcal{A}_m \otimes \mathcal{A}_n$ は $\mathcal{A}_{m+n}$ の部分代数とみなせるので, これらを誘導する事により, 夫々, $\mathcal{A}_{m+n}$-加群を定め, これを $V \circ W$ と記す. つまり,

$$V \circ W := \mathrm{Ind}_{\mathcal{A}_m \otimes \mathcal{A}_n}^{\mathcal{A}_{m+n}} (V \boxtimes W),$$

と置くわけである. (これは所謂 parabolic induction と呼ばれるもの?) このとき, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_k)$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_m)$ 及び $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_n)$ に対し, $(X \circ Y) \circ Z \cong X \circ (Y \circ Z)$ が成り立つ事は, tensor 積の性質の簡単な応用である.

問題 5.1. この事を示せ.

さて, Abel 圏 $\mathcal{C}$ に対し, その Grothendieck 群 を $K_0(\mathcal{C})$ と記す事にする. これは $\{[V] | V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ の生成する自由 Abel 群を

$$\{[X] - [Y] + [Z] |\, 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \quad 完全\ \mathrm{in}\ \mathcal{C}\}$$

の生成する部分群で割って得られる Abel 群である. 上の構成から, Abel 群 $K_0(\mathcal{A}) := \bigoplus_{n>1} K_0(\mathcal{A}_n)$ の上には積構造 $*$ が, $[V]*[W] = [V \circ W]$ によって定まり, これにより $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ は環となる. この構造を以下, 夫々の場合に具体的に調べてみよう.

5.2 Temperley-Lieb 代数

ここでは, 簡単の為, 考察対象の Temperley-Libe 代数 $TL_n(\delta)$ が半単純な場合, つまり, $\delta = -(q+q^{-1})$ と書く時, q が 1 の冪根で無い場合を考察する.

$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. このとき, Schur-Weyl duality (cf. 定理 3.3) より, $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes TL_{m+n}(\delta)$-加群として,

$$V(1)^{\otimes(m+n)} = \bigoplus_{r \in \mathcal{T}(m+n)} V(r) \boxtimes W_r(m+n)$$

の様に分解する. 一方, $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes (TL_m(\delta) \otimes TL_n(\delta))$-加群とみると,

$$\begin{aligned}
V(1)^{\otimes(m+n)} &= (V(1)^{\otimes m}) \otimes (V(1)^{\otimes n}) \\
&= \bigoplus_{s \in \mathcal{T}(m),\, t \in \mathcal{T}(n)} (V(s) \boxtimes W_s(m)) \otimes (V(t) \boxtimes W_t(n)) \\
&\cong \bigoplus_{s \in \mathcal{T}(m),\, t \in \mathcal{T}(n)} (V(s) \otimes V(t)) \boxtimes (W_s(m) \boxtimes W_t(n)) \\
&\cong \bigoplus_{s \in \mathcal{T}(m), t \in \mathcal{T}(n)} \bigoplus_{\substack{r \in \mathcal{T}(m+n) \\ |s-t| \le r \le s+t}} V(r) \boxtimes (W_s(m) \boxtimes W_t(n)).
\end{aligned}$$

ゆえ,

$$\mathrm{Res}^{TL_{m+n}(\delta)}_{TL_m(\delta) \otimes TL_n(\delta)} W_r(m+n) = \bigoplus_{\substack{s \in \mathcal{T}(m), t \in \mathcal{T}(n) \\ |s-t| \le r \le s+t}} W_s(m) \boxtimes W_t(n),$$

となる. 従って, Frobenius の相互律 より, 次の補題を得る:

補題 5.1.

$$\mathrm{Ind}^{TL_{m+n}(\delta)}_{TL_m(\delta) \otimes TL_n(\delta)} (W_s(m) \boxtimes W_t(n)) = \bigoplus_{\substack{r \in \mathcal{T}(m+n) \\ |s-t| \le r \le s+t}} W_r(m+n).$$

ここで, 自然な埋め込み $TL_N(\delta) \hookrightarrow TL_{N+2}(\delta)$ の定める inductive limit $TL_{even}(\delta)$ $(N \equiv 0)$ 及び $TL_{odd}(\delta)$ $(N \equiv 1)$ を考えよう. このとき, $\mathcal{T}_{even} = 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び $\mathcal{T}_{odd} = 1 + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とおくと, $K_0(TL_{even}(\delta)) = \prod_{t \in \mathcal{T}_{even}} \mathbb{Z}[W_t]$ であり, $K_0(TL_{odd}(\delta)) = \prod_{t \in \mathcal{T}_{odd}} \mathbb{Z}[W_t]$ である. 従って, $K_0(TL(\delta)) = K_0(TL_{even}(\delta)) \oplus K_0(TL_{odd}(\delta))$ とおくと, これは $\mathfrak{sl}_2$ の表現環の然るべき完備化と同型である.

5.3 Jones' Quotient

ここでは, 前部分節と同様の考察を行う. 但し, ここでは q^2 は 1 の原始 l-乗根 $(l \geq 3)$ であると仮定する.

$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. このとき, 定理 4.1 及び Schur-Weyl duality (cf. 定理 4.2) より, $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes Q_{m+n}(l)$-加群として,

$$\Delta_q(1)^{\underline{\otimes}(m+n)} = \bigoplus_{r \in \mathcal{R}(m+n)} \Delta_q(r) \boxtimes L_r(m+n)$$

の様に分解する. 一方, $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes (Q_m(l) \otimes Q_n(l))$-加群とみると, 補題 4.1 より,

$$\begin{aligned}
\Delta_q(1)^{\underline{\otimes}(m+n)} &= (\Delta_q(1)^{\underline{\otimes} m}) \underline{\otimes} (\Delta_q(1)^{\underline{\otimes} n}) \\
&= \bigoplus_{s \in \mathcal{R}(m),\, t \in \mathcal{R}(n)} (\Delta_q(s) \boxtimes L_s(m)) \underline{\otimes} (\Delta_q(t) \boxtimes L_t(n)) \\
&\cong \bigoplus_{s \in \mathcal{R}(m),\, t \in \mathcal{R}(n)} (\Delta_q(s) \underline{\otimes} \Delta_q(t)) \boxtimes (L_s(m) \boxtimes L_t(n)) \\
&\cong \bigoplus_{s \in \mathcal{R}(m), t \in \mathcal{R}(n)} \bigoplus_{\substack{r \in \mathcal{R}(m+n) \\ |s-t| \leq r \leq \min\{s+t, 2(l-2)-(s+t)\}}} \Delta_q(r) \boxtimes (L_s(m) \boxtimes L_t(n)).
\end{aligned}$$

ゆえ,

$$\mathrm{Res}^{Q_{m+n}(l)}_{Q_m(l) \otimes Q_n(l)} L_r(m+n) = \bigoplus_{\substack{s \in \mathcal{R}(m), t \in \mathcal{R}(n) \\ |s-t| \leq r \leq \min\{s+t, 2(l-2)-(s+t)\}}} L_s(m) \boxtimes L_t(n),$$

となる. 従って, Frobenius の相互律 より, 次の補題を得る:

補題 5.2.

$$\mathrm{Ind}^{Q_{m+n}(l)}_{Q_m(l) \otimes Q_n(l)} (L_s(m) \boxtimes L_t(n)) = \bigoplus_{\substack{r \in \mathcal{R}(m+n) \\ |s-t| \leq r \leq \min\{s+t, 2(l-2)-(s+t)\}}} L_r(m+n).$$

ここで, 自然な埋め込み $Q_N(l) \hookrightarrow Q_{N+2}(l)$ の定める $Q_{even}(l)$ $(N \equiv 0)$ 及び $Q_{odd}(l)$ $(N \equiv 1)$ を考えよう．このとき, $\mathcal{R}_{even} = 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \cap \{t \in \mathbb{Z} | 0 \leq t \leq l-2\}$ 及び $\mathcal{R}_{odd} = (1 + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap \{t \in \mathbb{Z} | 0 \leq t \leq l-2\}$ とおくと,

$$K_0(Q_{even}(l)) = \bigoplus_{t \in \mathcal{R}_{even}} \mathbb{Z}[L_t], \qquad K_0(Q_{odd}(l)) = \bigoplus_{t \in \mathcal{R}_{odd}} \mathbb{Z}[L_t]$$

となっている．そこで, $K_0(Q(l)) = K_0(Q_{even}(l)) \oplus K_0(Q_{odd}(l)) = \bigoplus_{0 \leq t \leq l-2} \mathbb{Z}[L_t]$ とおくと, これは $A_1^{(1)}$ の level $l-2$ の Fusion algebra と同型である.

5.4 $N \to \infty$

ここでは, この $N \to \infty$ なる極限の意味することについて, 少し考察する.

5.4.1 歴史的背景

1980 年代前半に, V. F. R. Jones は, finite index の subfactor を持つ von Neumann 環を分類した彼の有名な論文 [J1] の中で, Temperley-Lieb 代数と Virasoro 代数 (cf. [IK]) と呼ばれる無限次元の Lie 代数の間の奇妙な類似性を見出した.

1980 年代後半以降, V. F. R. Jones を中心とする作用素環の研究者による仕事を持ってしてもまだ確信をついたと思える状況には無い.

1990 年代になって, H. Saleur を中心とする物理学者によって, この ‘observation’ に意味を付けるべく, 色んな研究がされている．2000 年代後半からは, 所謂 logarithmic conformal field theory の発展に伴い, この ‘observation’ は新たな局面を迎えることになるが, 未だに明快な説明が与えられているとは言い難い状況にあり, これが単なる偶然か或いは深い洞察なのかは, はっきり分からない.

こんな中, G. Lehrer 及び R. Zhang という cellular algebra, 特に, Brauer algebra や Temperley-Lieb algebra に詳しい Sydney 大学の研究者と Virasoro 代数について少しは知っている (はずの) 講演者と, 物理学者のしてきた仕事の表現論的に明快な解釈を与えられないか, という想いで共同研究が始まったのが 2016 年の 11 月であった. [ILZ] のその最初の一ステップに過ぎないが, そこそこ面白い話になったように思う.

5.4.2 現象論

ここでは, 少し我々が知っている Jones’ Quotient $Q_n(l)$ $(l \geq 3)$ に関する現象論について, 解説する.

$l=3$ の時, 任意の $n \geq 2$ に対し, 例 1.1 より, $Q_n(3) \cong \mathbb{C}$ となり, この場合は理論は自明である.
$l=4$ の時, $\dim Q_n(4) = 2^{n-1}$ となっている. 勘の良い人は Clifford 代数との関係を思うであろう. その直感は実は正しい. 正確には $\mathcal{C}l_n$ を $\mathbb{C}^n$ 上の非退化な双一次形式に付随する Clifford 代数 とすると, $Q_n(4)$ は $\mathcal{C}l_n$ の even part と同型になることが示される. よって, $n \to \infty$ なる極限においては Ising 模型 を想像させるが, 実際 $c = \frac{1}{2}$ の Virasoro 代数の極小系列表現と関係する事が, W. M. Koo 及び H. Saleur [KS] によって知られている.
$l=5$ の時はどうであろうか？ 世の中そうは甘くはない. しかし, $\dim Q_n(5)$ は $2n+1$ 番目の Fibonacci 数 で与えられ, その 2 つの既約表現の次元も n の偶奇によって異なる Fibonacci 数で与えられることが知られている (cf. [ILZ]). G. Andrews [An] によると, Rogers-Ramanujan identity の有限版として, この Fibonacci 数の q-類似が与えられる, という事であるが, これは何を意味するのであろうか？ 因みに, Virasoro 代数の極小系列表現であって, その指標が Rogers-Ramanujan identity を与えるものは $(2,5)$ 系列, つまり, 所謂 Lee-Yang の特異点 と呼ばれる $c = -\frac{22}{5}$ の理論がある. しかし, これは単なる偶然かどうかは, 今のところ何とも言えない.

これより先は, 上の様な観察結果も無く, 唯一分かっている (cf. [ILZ]) のは, 既約表現の次元の生成函数がどう書けるか, という事くらいである.

5.4.3 妄想?

この講義で扱った話題は標語的に述べると, Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$ 或いはその Jones' Quotient $Q_n(l)$ の Fusion structure は, Schur-Weyl duality を経て, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ $(\delta = -(q+q^{-1}))$ に統制されている, という事である. この意味では, Virasoro 代数の Fusion 代数の構造についても, VOA の議論から, 同様の事が示され, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ がその構造を統制している, と言えよう. こうなると,

Temperley-Lieb 代数と Virasoro 代数の関係を統制するものは,
量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ である,

と思いたくなる. この感覚が正しいとすると, これらの一般化 ($\mathfrak{sl}_2 \to$ 単純 Lie 環) は？ これらの話はほとんど解っておらず, 今後の発展に期待したい.

References

[A] Henning Haahr Andersen, *Tensor products of quantized tilting modules*, Comm. Math. Phys. **149** (1992), no. 1, 149–159.

[ALZ] Henning H. Andersen, Gustav I. Lehrer, and Ruibin Zhang, *Cellularity of certain quantum endomorphism algebras*, Pacific J. Math. **279** (2015), no. 1–2, 11–35.

[An] Andrews G. E., *Fibonacci Numbers and the Rogers-Ramanujan Identities*, Fibonacci Quarterly **42**, 2004, 3–19.

[AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wisley, 1969.

[CE] A. Connes and D. E. Evans, *Embeddings of $U(1)$-Current Algebras in Non-Commutative Algebras of Classical Statistical Mechanics*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 507–525.

[GL1] J. J. Graham and G. I. Lehrer, *Cellular algebras*, Invent Math **123** (1996) 1–34.

[GL2] J. J. Graham and G. I. Lehrer, *The representation theory of affine Temperley-Lieb algebras*, l'Ensiegn. Math. (2) **44** (1998) 173–218.

[H] 堀田　良之, 代数入門 – 群と加群 –, 数学シリーズ, 裳華房, 1988 年.

[IK] K. Iohara and Y. Koga, *Representation Theory of the Virasoro Algebra*, Springer Monograph in Math., Springer, 2011.

[ILZ] K. Iohara, G.I. Lehrer and R.B. Zhang, *Temperley-Lieb at Roots of Unity, A Fusion Category and the Jones Quotient*, preprint.

[Iw] 岩堀 長慶, 対称群と一般線形群の表現論 – 既約指標 · *Young* 図形とテンソル空間分解 –, 岩波講座 基礎数学, 線型代数 vi, 岩波書店, 1978 年.

[Ji] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke Algebra and the Yang-Baxter Equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[J1] V. F. R. Jones, *Index of subfactors*, Invent. Math. **72** (1983) 1–25.

[J2] V. F. R. Jones, *Quotient of the Affine Hecke Algebra in the Brauer Algebra*, l'Enseign. Math. **40** (1994), 313–344.

[J3] V. F. R. Jones, *Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335–388.

[KS] Koo W. M. and Saleur H., *Representations of the Virasoro algebra from lattice models*, Nucl. Phys. **B426** (1994) 459–504.

[KL] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representations of a Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 165–184.

[L] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, 1994.

[S] B. Sagan, *The Symmetric Group*, *Representations, Combinatorial Algorithlms, and Symmetric Functions*, Graduate Texts in Math. **203**, Springer Verlag, 2001.

[Ta] 谷崎 俊之, リー代数と量子群, 共立叢書 現代数学の潮流, 2002.

[TL] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb, *Relation between the 'Percolation' and 'Colouring' Problem and other Graph-Theoretical Problems associated with Regular Planar Lattices: Some Exact Results for the 'Percolation' Problem*, Proc. Roy. Soc. London Ser. **A 322** (1971), 251–280.

[Wa] 和久井 道久, *Temperley-Lieb 代数とその応用*, 2010 年 8 月.

[We] H. Wenzl, *On sequences of projections*, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **9** (1987), no. 1, 5–9.

[Wi] G. Williamson, *Mind your P and Q-symbols*, Dissertation of B.A., University of Sydney, 2003.