

Feuille 2 : Ensembles et applications

- Exercice 1**
1. On note $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$.
 2. On note $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
 3. On note $A =] - \infty, 3]$, $B =] - 2, 7]$ et $C =] - 5, +\infty[$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ et $B \cup C$.

Exercice 2 Soit A et B deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Exercice 3 Soit A , B et C trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C) ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Exercice 4 Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$.

Exercice 5 En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Exercice 6 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1. f s'annule ;
2. f est l'application nulle ;
3. f n'est pas une application constante ;
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5. f s'annule au plus une fois.

Exercice 7

1. Soient les fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'observe-t-on ?
2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

$$(a) h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad (b) h(x) = \frac{1}{x+7}; \quad (c) h(x) = \sqrt{3x-1}.$$

Exercice 8 Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f)(x)$ (où f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\begin{array}{lll} 1. & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \mapsto x^2 & \\ 2. & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ & \\ & x \mapsto x^2 & \\ 3. & f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} & \\ & n \mapsto n & \\ 4. & f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \mapsto 2x & \\ 5. & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \mapsto 8x + 3 & \\ 6. & f: \mathbb{R} \longrightarrow \{14\} & \\ & x \mapsto 14 & \\ 7. & f: \{17\} \longrightarrow \{12; 17\} & \\ & x \mapsto 17 & \\ 8. & f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \mapsto \frac{1}{x} & \\ 9. & f: \{0\} \longrightarrow \{0\} & \\ & x \mapsto 0 & \\ 10. & f: \{1\} \longrightarrow \{1/2\} & \\ & x \mapsto \frac{1}{x+1} & \\ 11. & f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} & \\ & n \mapsto n+1 & \\ 12. & g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} & \\ & n \mapsto n+1 & \\ 13. & k: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \mapsto \frac{x+1}{x-1} & \end{array}$$

Exercice 10 1. On définit $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par $f(m, n) = mn$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

2. On définit $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $g(k) = (k, (k+1)^2)$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

Exercice 11 Soient I et J des parties de \mathbb{R} , et $f: I \rightarrow J$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = x^2$.

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f ne soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 12 1. Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$

2. On définit $f: \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 13 On définit une partie du plan par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$ puis une application $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

1. Représenter graphiquement D .
2. (a) Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

(b) En déduire que f est injective.

3. Est-ce que f est surjective ?

Exercice 14 Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

$$(a) \quad g \circ f = \text{id}_E; \qquad (b) \quad f \circ g = \text{id}_F; \qquad (c) \quad f \circ f = \text{id}_E.$$

Exercice 15 On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$.

1. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$?

Exercice 16 1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$$

- (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
- (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.
2. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.

Exercice 17 Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0, \pi]})^{-1}([0, 1])$;
11. $(\cos_{|[3\pi, 7\pi]})^{-1}([0, 1])$;
12. $\cos^{-1}([0, 1])$;

Exercice 18 Soient E un ensemble et f une application de E dans lui-même telle que $f(f(E)) = E$. Montrer que f est surjective.

Exercice 19 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) f est injective;
- ii) Pour tous A_1, A_2 parties de X , on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Exercice 20 Montrer que chacune des applications suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g :]e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t, n) = t \cdot 10^n$.

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.

Exercice 22 Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1} , montrer que f est bijective.

Exercice 23 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k + 1) = -k - 1$.

1. Soit m un entier positif. Déterminer tous les antécédents de m .
2. Soit m un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de m .
3. L'application f est-elle une bijection ?

Exercice 24 Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow J$ une application strictement croissante.

1. Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
2. Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \rightarrow K$ soit bijective.

Exercice 25 Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\exists G \subset F$ telle que f est une bijection de E dans G ;
- ii) f est injective.

Exercice 26 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit y un réel. Combien y possède-t-il d'antécédents ? (On discutera selon la valeur de y).
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
4. (a) Soit y un réel ayant exactement deux antécédents x_1 et x_2 par f . Déterminer la valeur du produit $x_1 x_2$, puis montrer qu'un et un seul des réels x_1 et x_2 appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.
(b) En déduire que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 27 Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F . Soient également A_1 et A_2 deux parties de E , et B_1 et B_2 deux parties de F .

1. Montrer que $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 28 Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E , on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E , on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 29 Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est une bijection.