Feuille 3 : Bases de logique

Exercice 1 *Soient P, Q deux propositions. Ecrire la table de vérité de non$(P \Rightarrow Q)$ et celle de P ou (non Q).*

Exercice 2 *Soient P, Q, R des propositions. Ecrire la table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$ ou ((non R) et P)).*

Exercice 3 *Soient P, Q, R des prédicats. Montrer :*

1. $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ *équivaut à* (P et Q) $\Longrightarrow R$.
2. (P ou Q) $\Longrightarrow R$ *équivaut à* $(P \Longrightarrow R)$ et $(Q \Longrightarrow R)$.

Exercice 4 *Soient P, Q des propositions. Montrer que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P$ et $Q))$ est une tautologie.*

Exercice 5 *Montrer par disjonction de cas que dans un groupe de personnes non vide, il existe toujours une personne P telle que : P a les yeux bleus $\Rightarrow$ tout le monde a les yeux bleus.*

Exercice 6 *Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université de Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et, pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.*

1. *Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : «Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».*
2. *Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques, puis l'énoncer en français.*

Exercice 7 *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Écrire en utilisant les symboles $\forall, \exists, \in, \notin$ les assertions*

1. $A \cap B \neq \varnothing$; 2. $A \subset B$; 3. $A \not\subset B$; 4. $A = \varnothing$.

Exercice 8 *On considère les ensembles*

$$E = \left\{x \in [0,1],\, \exists n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1}\right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{x \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N},\, x < \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Déterminer E et F.

Exercice 9 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est* bornée *si la propriété suivante est vraie :*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x)| \leqslant M.$$

Écrire avec des quantificateurs la définition de « f n'est pas bornée. »

2. *Écrire avec des quantificateurs la définition de « f est croissante », puis celle de « f n'est pas croissante », et enfin celle de « f est décroissante ».*

Exercice 10 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de nombres entiers naturels définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ *et* $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. *Établir la propriété*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3^n.$$

Exercice 11 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = u_1 = -1$ *et* $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que* $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ *pour tout entier naturel* n.

Exercice 12 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer par récurrence forte que l'on a* $u_n = 2^{n-1}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

Exercice 13 *Pour tout nombre entier naturel* n, *soit* $P(n)$ *la propriété :* $2^n > n^2$.

1. *Démontrer que, pour* $n \geqslant 3$, *l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*
2. *Pour quels entiers* n *la propriété* $P(n)$ *est-elle vraie ?*

Exercice 14 *Un nombre entier* $p \geqslant 2$ *est dit* premier *si ses seuls diviseurs sont* 1 *et* p. *En raisonnant par récurrence, démontrer que tout nombre entier* $n \geqslant 2$ *est un produit de nombres premiers.*

Exercice 15 (Principe des tiroirs)

1. *Soit* n *un nombre entier,* $n \geqslant 1$. *Démontrer que, si vous rangez* $n+1$ *paires de chaussettes dans* n *tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.*
2. *Un fichier contient* 500 000 *mots formés d'au plus quatre lettres de l'alphabet latin. Peuvent-ils être tous distincts ?*

Exercice 16 *Deux pays sont dits voisins s'ils ont une frontière commune. On suppose qu'il y a un nombre fini non nul de pays et que chaque pays a au moins un voisin. En considérant l'application qui à chaque pays associe son nombre de voisins, démontrer qu'il existe au moins deux pays qui ont le même nombre de voisins.*

Exercice 17 *Soit* $n \geqslant 1$ *un nombre entier naturel. On se donne* $n+1$ *nombres réels* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *dans* $[0,1]$ *tels que* $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. *On veut démontrer par l'absurde la propriété (P) suivante :* il existe deux de ces nombres qui sont distants d'au plus $\frac{1}{n}$.

1. *Écrire à l'aide de quantificateurs et de l'expression* $x_i - x_{i-1}$ *une formule logique équivalente à la propriété (P).*
2. *Écrire la négation de cette formule logique.*
3. *Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (P) (* pour cela, on pourra chercher à prouver $x_n - x_0 > 1$*).*
4. *Donner une nouvelle preuve de la propriété (P) en utilisant cette fois le principe des tiroirs.*

Exercice 18 *Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre réel* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls p *et* q *tels que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1. *Vérifier que l'on a* $p^2 = 2q^2$.
2. *Justifier que l'on peut supposer que* p *et* q *sont premiers entre eux.*
3. *Démontrer que* p *est pair.*
4. *En déduire que* q *est pair.*
5. *En déduire que* p *et* q *n'existent pas.*

Exercice 19 *Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.*

1. *Jules et Jim sont deux habitants de cette île. Jules déclare : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ». En raisonnant par l'absurde, démontrer que Jules est sincère. Qu'en est-il de Jim ?*
2. *Anne, Émilie et Charlotte sont trois habitantes. Anne déclare : « Nous sommes toutes menteuses ». Émilie dit : « Une et une seule d'entre nous est sincère ». En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'Anne est une menteuse, puis qu'Émilie est sincère. Qu'en est-il de Charlotte ?*

Exercice 20 *Soit* P_1, P_2, P_3 *et* P_4 *les parties du plan* $\mathbb{R}^2$ *définies par*

$$\begin{array}{ll} P_1 = \{(x,y), x+y \leq 1\} & P_2 = \{(x,y), x-y \leq 1\} \\ P_3 = \{(x,y), -x+y \leq 1\} & P_4 = \{(x,y), -x-y \leq 1\}. \end{array}$$

1. *Représenter* $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ *et* $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ *dans le plan* $\mathbb{R}^2$.
2. *Comparer* $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ *et* $P_1^c \cup P_2^c$.

Exercice 21 *Soit* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *et* $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ *deux ensembles. Écrire le produit cartésien* $A \times B$. *Quel est le nombre de parties de* $A \times B$ *?*

Exercice 22 *On considère les ensembles* $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ *et* $G = \{1, 4\}$. *On rappelle que* $\mathcal{P}(E)$ *désigne les parties de* E. *Donner en extension (c'est à dire écrire tous les éléments que contiennent) les ensembles suivants :*

1. $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E \cap G)$, $\mathcal{P}(F \cap G)$, $\mathcal{P}(E \cup G)$
2. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

Exercice 23 *Soit* E *un ensemble fini non vide et* a_0 *un élément fixé de* E. *On considère l'application*

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), A \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{array} \right. .$$

1. *Démontrer que, si* $\mathrm{Card}(A)$ *est pair, alors* $\mathrm{Card}(f(A))$ *est impair, et que si* $\mathrm{Card}(A)$ *est impair, alors* $\mathrm{Card}(f(A))$ *est pair.*
2. *Démontrer que, pour toute partie* A *de* E, $(f \circ f)(A) = A$.
3. *En déduire que* f *est bijective.*
4. *Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : «* Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair *».*

Exercice 24 *Soit* E *un ensemble. On suppose qu'il existe une application* $f : E \to \mathcal{P}(E)$ *qui soit surjective.*

1. *Pour* $a \in E$, *à quel ensemble appartient* $f(a)$ *?*
2. *On considère l'ensemble* $A := \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$ *et* a *un antécédent de* A *par* f. *Est-il possible que* $a \in A$ *? Que* $a \notin A$ *? Qu'en concluez-vous ?*

Exercice 25 *Soit* E *et* F *deux ensembles.*

1. *Si* $A \subset E$ *et* $B \subset F$, *démontrer que l'on a alors* $A \times B \subset E \times F$.
2. *Supposons que les ensembles* E *et* F *contiennent chacun au moins deux éléments distincts. Trouver une partie* X *de* $E \times F$ *qui ne soit pas de la forme* $A \times B$ *avec* $A \subset E$ *et* $B \subset F$.

Exercice 26 (Formule de Vandermonde)

1. *Soit* k, m, n *trois nombres entiers naturels tels que* $k \leqslant \min\{m, n\}$. *Démontrer l'identité*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Pour cela, on pourra considérer deux ensembles finis E, F *tels que* $\mathrm{Card}(E) = m$ *et* $\mathrm{Card}(F) = n$, *puis dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à* k *éléments dans la réunion* $E \cup F$.

2. *En déduire l'identité* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 27 *Le symbole* $\neg$ *désigne la négation. Le connecteur NAND (non-et) est défini par*

$$P \text{ NAND } Q \text{ équivaut à } \neg(P \wedge Q).$$

1. *Donner la table de vérité du connecteur NAND.*
2. *Peut-on définir* $\neg$, $\wedge$ *et* $\vee$ *en fonction uniquement de NAND ?*
3. *Mêmes questions pour le connecteur NOR (non-ou) défini par* $\neg(P \vee Q)$.

Exercice 28 *Soit* E *un ensemble à* n *éléments et* A *une partie de* E *à* p *éléments.*

1. *Combien y a-t-il de parties* X *de* E *contenant* A *?*
2. *Soit* m *un entier tel que* $p \leqslant m \leqslant n$. *Combien y a-t-il de parties* X *de* E *à* m *éléments contenant* A *?*
3. *Combien y a-t-il de couples* (X, Y) *de parties de* E *tels que* $X \cap Y = A$ *?*

Exercice 29 *On définit une suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *par le procédé suivant :*

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2^{k+1} - 1}{2^k} & \text{si } n = 2k \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} & \text{si } n = 2k + 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 30 *Soit* $p \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 0$ *deux nombres entier. On désigne par* $D(p, n)$ *le nombre de* p*-uplets* $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ *tels que* $x_1 + \ldots + x_p = n$.

1. *Établir l'identité* $\displaystyle D(p, n) = \sum_{k=0}^{n} D(p-1, n-k)$.
2. *En déduire la formule* $D(p, n) = \dbinom{n+p-1}{p-1}$.

Exercice 31 *Soit un ensemble* E. *Pour toutes parties* A *et* B *de* E,
on désigne par $A \triangle B$ *l'ensemble* $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. *Démontrer que* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. *Démontrer qu'il existe une unique partie* X *de* E *telle que pour toute partie* A *de* E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.

3. *Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = E$.*

Exercice 32 *(***Fonctions caractéristiques***) Étant donné une partie X d'un ensemble E, on définit une application $f_X : E \to \{0,1\}$ par :*

$$\forall e \in E,\ f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1. *Si A et B sont deux parties de E, démontrer l'équivalence*

$$A = B \iff f_A = f_B.$$

2. *Comment peut-on exprimer la condition $A \subset B$ avec les fonctions f_A et f_B ?*
3. *Exprimer $f_{A \cap B}, f_{A \cup B}$ et f_{A^c} à l'aide de f_A et f_B.*
4. *Exprimer $f_{A \triangle B}$ en fonction de f_A et f_B.*
5. *Reprendre les questions 2, 3 de l'exercice précédent en utilisant les fonctions caractéristiques.*

Exercice 33 *Soit A, B deux ensembles finis non vides.*

1. *En raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments de A, démontrer que le nombre d'applications de A dans B est* $\mathrm{Card}(B)^{\mathrm{Card}(A)}$.
2. *Retrouver de cette manière le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ (*utiliser l'exercice 3-106*).*