Feuille 4 : Nombres complexes

Exercice 1 *Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :*

a) $z = 4 + 5i$, *b)* $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, *c)* $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,

d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, *e)* $z = \dfrac{4 - 3i}{5 + 2i}$, *f)* $z = \dfrac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,

g) $z = \dfrac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$.

Exercice 2 *Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de* $z = \dfrac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$ *pour* $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de* $Re(z)$ *et* $Im(z)$ *:*

a) $z + 1$, *b)* $z^2 + 3i$, *c)* $\bar{z} + 2z$, *d)* $\bar{z} + z - i$,

e) $z^3 + 1$, *f)* $iz^2 - 3\bar{z}$, *g)* $z - \bar{z} + iz$, *h)* $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Exercice 4 1. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

a) $z = 2 + 5i$, *b)* $z = -3 + 2i$, *c)* $z = (3 - 2i)(9 + i)$, *d)* $z = \dfrac{2 + 5i}{5 - 2i}$.

2. *Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :*

a) $z\bar{z}$, *b)* $2z^2$, *c)* $\dfrac{2}{\bar{z}}$, *d)* $3\dfrac{\bar{z}^2}{z}$.

Exercice 5 *Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. *Établir la relation* $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ *et en donner une interprétation géométrique.*

Exercice 6 1. *Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan* $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

a) $z = 1 - i$, *b)* $\bar{z}$, *c)* $z + \bar{z}$, *d)* $z - \bar{z}$.

2. *Représenter les vecteurs suivants dans le plan* $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

a) $\vec{v}$ *d'affixe* $2 + i$, *b)* $\vec{w}$ *d'affixe* $-3 + 2i$, *c)* $\vec{v} + \vec{w}$, *d)* $2\vec{v} - \vec{w}$.

Exercice 7 *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :*

a) $|1 - z| \leq \dfrac{1}{2}$ *b)* $Re(1 - z) \leq \dfrac{1}{2}$ *c)* $Re(iz) \leq \dfrac{1}{2}$ *d)* $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$ *e)* $\left|\dfrac{z - 3}{z + 3}\right| < 2$

Exercice 8 *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$, *puis* $\sin(3x)$ *en fonction de* $\sin(x)$.
2. *Linéariser* $\sin^4(x)$ *puis* $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 9 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. *Calculer*

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 10 *1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :*

a) $u = -3$, *b)* $v = 1 - i$, *c)* $w = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, *d)* $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

2. *En déduire le module et un argument de* uw *et* $\dfrac{z}{v}$.

Exercice 11 *Soit* $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1. *Calculer* z^2, *déterminer le module et un argument de* z^2 *et écrire* z^2 *sous forme trigonométrique.*
2. *En déduire le module et un argument de* z.
3. *En déduire une expression de* $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12 *1. Donner la forme trigonométrique de* $(1 + i)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(utiliser la formule de Moivre).*

2. *En déduire une expression très simple de* $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

Exercice 13 *Soient* $z \in \mathbb{C}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Il existe exactement* n *nombres complexes* w *vérifiant* $w^n = z$. *Ces nombres sont appelés les* n *racines* n*-ième de* z.

1. *Représenter dans le plan complexe les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de* -1.
2. *Soit* $n \geq 2$ *un entier. Déterminer les* $n - 1$ *racines du polynôme complexe* $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.

Exercice 14 *1. Déterminer les racines cubiques de* 1 *et les représenter dans le plan complexe.*

2. *On note* $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. *Montrer que* $1 + j + j^2 = 0$.
3. *Exprimer les racines cubiques de* 1 *en fonction de* j.

Exercice 15 *1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :*

a) $z = 7 + 24i$, *b)* $z = 9 + 40i$, *c)* $z = 1 + i$.

2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$, *b)* $z^2 = 3 - 4i$.

Exercice 16 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

a) $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$, *b)* $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0$,

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$. *d)* $z^3 + 3z - 2i = 0$,

e) $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$, *f)* $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$

g) $z^5 - z = 0$, *h)* $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$.

Exercice 17 *1. Donner les applications de* $\mathbb{C}$ *qui représentent les transformations du plan suivantes.*

a) La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.

b) L'homothétie de rapport 3 *et de centre* $1 + 2i$.

c) La rotation d'angle $\pi/6$ *et de centre 1.*

d) La symétrie centrale du centre i.

2. *Identifier les transformations suivantes dans le plan complexe .*

a) $f_1 : z \mapsto z + 3 - 2i$. *b)* $f_2 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{7}} z$. *c)* $f_3 : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$. *d)* $f_4 : z \mapsto 3z - 5 + i$.

Exercice 18 *Soit* $c \in \mathbb{C}$ *tel que* $|c| < 1$.

1. *Montrer que* $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ *si et seulement si* $|z| \leq 1$.

2. *On notera $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & D \\ & z & \mapsto & \dfrac{z+c}{1+\bar{c}z} \end{array}$$

est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 19 *Soit $f : x \mapsto \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-3, 0\}$. Calculer $f(1-i)$et $f(1+i)$.*

Exercice 20 *Soit $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.*

Exercice 21
1. *Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.*
2. *Linéariser $\cos^4(x)$.*

Exercice 22
1. *Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.*
2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$*

Exercice 23
1. *Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.*
2. *Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$.*

Exercice 24 *Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes des nombres complexes suivants :*

a) $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ pour $n = 3$, *b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n = 4$,* *c) $z = -1$ pour $n = 5$.*

Exercice 25 *Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :*

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$$

Exercice 26 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.*

Exercice 27 *On considère l'équation suivante :*

$$z^4 - 3z^3 + (2-i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. *Montrer que l'équation* (E) *admet 2 solutions réelles.*
2. *Résoudre* (E) *dans $\mathbb{C}$*

Exercice 28 *On considère la fonction f suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z(1-z) \end{array}$$

1. *Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.*
2. *Montrer que si $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$.*

Indication : on pourra remarquer que $z(1-z) = \left(z - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} - z\right) + \dfrac{1}{4}$.