

## Feuille 6 : Polynômes

**Exercice 1.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P_n = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\dots(1 + X^{2^n})$ . Calculer les coefficients de  $P_n$ .

**Exercice 2.** Déterminer tous les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant les relations suivantes :

1.  $P(X^2 + 1) = P(X)$
2.  $P(2X + 1) = P(X)$

**Exercice 3.** Pour  $a, b$  réels, on note  $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  le polynôme  $P_{a,b}$  est-il le carré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Exercice 4.** On considère l'équation suivante dans  $\mathbb{C}[X]$  :  $P(2X) = P'(X)P''(X)$ .

1. On note  $P$  une solution non nulle de cette équation,  $\delta$  son degré et  $a$  son coefficient dominant.
  - a) Quel est le degré de  $P(2X)$  ? De  $P'P''$  ? En déduire la valeur de  $\delta$ .
  - b) Quel est le coefficient dominant de  $P(2X)$  ? De  $P'P''$  ? En déduire la valeur de  $a$ .
  - c) Déterminer  $P$ .
2. Conclure.

**Exercice 5.** Quelles sont les racines (dans  $\mathbb{C}$  et dans  $\mathbb{R}$ ) des polynômes suivants ?

1.  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$
2.  $X^6 - 4$
3.  $X^4 - 13X^2 + 36$
4.  $X^4 + 6X^2 + 25$ .

**Exercice 6.** 1. Soit  $m \geq 1$  un entier. Quelles sont les racines (dans  $\mathbb{C}$  et dans  $\mathbb{R}$ ) du polynôme  $X^m - 1$  ?

2. Soit  $n \geq 1$  un entier. Quelles sont les racines (dans  $\mathbb{C}$  et dans  $\mathbb{R}$ ) du polynôme  $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$  ?

**Exercice 7.** Montrer que le polynôme  $X^{163} + 24X^{57} - 6$  a au moins une racine sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Deux polynômes  $U$  et  $V$  réels vérifient  $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$  pour tout  $x > 0$ . Montrez que  $U$  et  $V$  sont tous deux égaux au polynôme nul.

**Exercice 9.** On définit une suite de polynômes  $P_0 = 2$ ,  $P_1 = X$  et  $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .
2. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$ .
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $P_n(2\cos\theta)$ .
4. Donner les racines de  $P_n$ .

**Exercice 10.** 1. Soient  $P_1$ ,  $P_2$  et  $Q$  trois polynômes. Montrer que  $P_1 - P_2$  divise  $Q(P_1) - Q(P_2)$ .

2. Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

**Exercice 11.** Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :

1.  $X + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$
2.  $X^2 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$
3.  $X^2 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$
4.  $X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$

**Exercice 12.** Soit  $n \geq 1$  un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^{5n}$  par  $X^5 - 1$ .
2. En déduire le reste de la division euclidienne de  $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$  par  $X^5 - 1$ .

**Exercice 13.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . On note  $R$  le reste de sa division euclidienne par  $X - 7$ . Montrer que  $R = P(7)$ .

**Exercice 14.** Soient  $a$  un nombre réel et  $n \geq 1$  un entier. On pose  $A = (X \sin a + \cos a)^n$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $X^2 + 1$ .

**Exercice 15.** Effectuer les divisions euclidiennes dans  $\mathbb{R}[X]$  de

1.  $3X^5 + 4X^2 + 1$  par  $X^2 + 2X + 3$ .
2.  $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^3 + X + 2$ .

**Exercice 16.** Soit  $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$  et  $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$ . Déterminer le PGCD de  $P$  et  $Q$  puis déterminer deux polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$ .

**Exercice 17.** Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1.  $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$
2.  $X^{11} + 2^{11}$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$
3.  $X^4 + 4$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$
4.  $X^4 - j$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , où  $j = \exp(2i\pi/3)$
5.  $X^8 + X^4 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$
6.  $X^5 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$

**Exercice 18.** Calculer le pgcd des couples de polynômes  $(P, Q)$  suivants :

1.  $P = 6(X - 1)^2(X + 2)^3(X^2 + 1)^4$  et  $Q = 15(X - 1)(X + 7)^3(X^2 + 1)$ ,
2.  $P = X^7 + 2X^6 - X - 2$  et  $Q = X^3 + X^2 - 2X$ ,
3.  $P = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$  et  $Q = X(X - 1)^2(X - 2)$ ,
4.  $P = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$  et  $Q = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$ .

**Exercice 19.** Soit  $P$  le polynôme réel :  $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$ . On suppose que  $-1$  est une racine de  $P$ .

1. Déterminer  $\alpha$ .
2. Montrer que  $-1$  est une racine double de  $P$ .
3. Montrer que  $j$  est une racine multiple de  $P$ .
4. Factoriser  $P$ , d'abord dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 20.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère le polynôme à coefficients réels  $P = aX^{n+1} + bX^n + c$ . Peut-on choisir  $a, b, c$  pour que  $P$  admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

**Exercice 21.** Pour tout complexe  $a$ , on pose  $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$ .

1. Calculer le PGCD de  $P_a$  et  $P'_a$ .
2. Pour quelles valeurs de  $a$  le polynôme  $P_a$  admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer  $P_a$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 22.** On considère l'équation suivante dans  $\mathbb{R}[X]$  :  $(P')^2 = 4P$ .

1. Déterminer toutes les solutions constantes de l'équation.
2. Soit  $P$  une solution non constante. Déterminer le degré de  $P$ , puis montrer que  $P$  possède au moins une racine multiple.
3. Conclure.

**Exercice 23.** Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les racines de l'équation  $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$ . Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \gamma}.$$

**Exercice 24.** Soit  $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$ .

1. Prouver que  $P$  n'a pas de racine réelle.

2. Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les trois racines complexes de  $P$ . Calculer  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  et  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ .

---

**Exercice 25.** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ . On suppose que  $Q$  divise  $P$ . Montrer que  $Q^2$  divise  $PQ' - P'Q$ .

**Exercice 26.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . On note  $\lambda$  et  $\mu$  les restes respectifs de la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  et par  $X - b$ .

1. Exprimer à l'aide de  $\lambda$  et  $\mu$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .

2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où  $\lambda = \mu = 0$  ?

**Exercice 27.** On définit une suite de polynômes  $P_0 = 0$ ,  $P_1 = 1$  et  $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$ .

2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont premiers entre eux.

3. Etablir que pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , on a :

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m .$$

4. Montrer que  $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , on a :

$$\text{Pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \text{Pgcd}(P_m, P_n) .$$

5. Conclure que  $\text{Pgcd}(P_m, P_n) = P_{\text{Pgcd}(m, n)}$ .

**Exercice 28.** Pour quelles valeurs de l'entier  $n \geq 1$  le polynôme  $P_n = X^{2n} + X^n + 1$  est-il divisible dans  $\mathbb{R}[X]$  par  $X^2 + X + 1$  ?

**Exercice 29.** Soient  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes  $X^m - 1$  et  $X^n - 1$ .

**Exercice 30.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2 .$$

**Exercice 31.** Pour  $n \geq 1$ , on note  $P_n = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$  pour  $n \geq 1$ . Factoriser le polynôme  $P_n$  et en déduire les valeurs de  $\sum_{k=0}^p \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$  et de  $\sum_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$ . On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

**Exercice 32.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que si  $z \in \mathbb{C}^*$  est racine alors  $\frac{1}{z}$  est racine.

2. Factoriser  $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$ .

**Exercice 33.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $P(X+1) = \sum_{n=0}^{\text{deg}(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$ .

**Exercice 34.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul et  $d$  son degré. Pour  $n$  entier naturel, on définit  $u_n$  comme étant la somme (avec multiplicité) des racines de  $P^{(n)}$ . Montrer que  $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$  est une suite arithmétique.

**Exercice 35.** Soit  $P = X^4 + 12X - 5$ . Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

**Exercice 36.** Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  qui satisfont à l'identité (\*) :

$$(X + 3)P(X) = XP(X + 1).$$

1. Soit  $P$  un polynôme vérifiant (\*). Montrer qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = XQ$ .
2. Déterminer  $Q(-1)$  puis  $Q(-2)$ .
3. En déduire que  $P$  est nécessairement de la forme  $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ .
4. Démontrer finalement que  $P$  vérifie (\*) si et seulement s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $P = aX(X+1)(X+2)$ .

**Exercice 37.** Soit  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$  un polynôme complexe de racines  $\alpha, \beta, \gamma$ . Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\beta + \alpha} .$$