Compléments de CM1

Fractions et des opérations

Une **fraction** est un nombre qui s'écrit sous forme de $\frac{a}{b}$ avec deux entiers relatifs a et $b \neq 0$. On décrète que

$$\text{les deux fractions } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{a'}{b'} \text{ sont égaux si et seulement si } ab' = a'b.$$

Voyons ce que signifie cette définition. Une propriété tout simple est que, $\forall\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire, on peut ≪ simplifier ≫. (Cette égalité est claire car $(am)b = a(mb) = a(bm)$.)

Maintenant, nous allons `définir` deux opérations: l'**addition**(= la somme) + et la **multiplication**(= le produit) $\times$ ou $\bullet$.

Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit la somme + par la formule suivante:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}. \tag{1}$$

($A{:=}B$ signifie ≪ A est défini par B ≫.) C'est formule est ≪ naturelle ≫ d'un sens, car

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Est-ce que c'est une bonne définition ?, i.e.(= *id est* = c'est-à-dire), on peut se poser une question (très importante) suivante: comme ily a plusieurs expressions pour une fraction, on se demande si le deuxième membre de (1) ne dépend pas de choix d'expressions. Vérifions si, pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'},$$

plus précisément,

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}.$$

Pour cela, il nous suffit de voir si l'égalité suivante est vraie:

$$(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd.$$

Par hypothèse $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a

$$ab' = a'b \qquad \text{et} \qquad cd' = c'd.$$

Puisque

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' - (a'd'+b'c')bd =&(ad)(b'd') + (bc)(b'd') - (a'd')(bd) - (b'c')(bd)\\ =&(ad)(b'd') - (a'd')(bd) + (bc)(b'd') - (b'c')(bd)\\ =&(ab'-a'b)dd' + bb'(cd'-c'd) = 0,\end{aligned}$$

on en déduit que
$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}.$$
Donc, la somme (1) ne dépend pas de choix des expressions de deux fractions. En jargon mathématique, on dit que la somme (1) est **bien-définie**.

Ensuite, Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit le produit $\times$ par la formule suivante:
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}. \tag{2}$$
De même (que la somme $+$), on pourra montrer que le produit (2) est aussi **bien-défini**, i.e., pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} \qquad \text{plus précisément,} \qquad \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}.$$
Il suffit de vérifier si on a
$$(ac)(b'd') = (a'c')(bd).$$
En effet, comme
$$(ac)(b'd') - (a'c')(bd) = (ab')(cd') - (a'b)(c'd) = (ab'-a'b)(cd') + (a'b)(cd'-c'd) = 0,$$
on en déduit que le produit (2) est bien-défini.

Enfin, on vient de voir que sur l'ensemble des fractions, noté $\mathbb{Q}$, il y a deux opérations $+$ et $\times$.