Compléments de CM1

Fractions et des opérations

Une **fraction** est un nombre qui s'écrit sous forme de $\frac{a}{b}$ avec deux entiers relatifs a et $b \neq 0$. On décrète que

les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égaux si et seulement si $ab' = a'b$.

Voyons ce que signifie cette définition. Une propriété tout simple est que, $\forall\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire, on peut ≪ simplifier ≫. (Cette égalité est claire car $(am)b = a(mb) = a(bm)$.)

Maintenant, nous allons `définir` deux opérations: l'**addition**(= la somme) + et la **multiplication**(= le produit) × ou •.

Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit la somme + par la formule suivante:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}. \tag{1}$$

($A{:=}B$ signifie ≪ A est défini par B ≫.) C'est formule est ≪ naturelle ≫ d'un sens, car

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Est-ce que c'est une bonne définition ?, i.e.(= *id est* = c'est-à-dire), on peut se poser une question (très importante) suivante: comme ily a plusieurs expressions pour une fraction, on se demande si le deuxième membre de (1) ne dépend pas de choix d'expressions. Vérifions si, pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'},$$

plus précisément,

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}.$$

Pour cela, il nous suffit de voir si l'égalité suivante est vraie:

$$(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd.$$

Par hypothèse $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a

$$ab' = a'b \qquad \text{et} \qquad cd' = c'd.$$

Puisque

$$\begin{aligned}(ad + bc)b'd' - (a'd' + b'c')bd =&(ad)(b'd') + (bc)(b'd') - (a'd')(bd) - (b'c')(bd)\\ =&(ad)(b'd') - (a'd')(bd) + (bc)(b'd') - (b'c')(bd)\\ =&(ab' - a'b)dd' + bb'(cd' - c'd) = 0,\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}.$$

Donc, la somme (1) ne dépend pas de choix des expressions de deux fractions. En jargon mathématique, on dit que la somme (1) est **bien-définie**.

Ensuite, Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit le produit $\times$ par la formule suivante:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}. \tag{2}$$

De même (que la somme $+$), on pourra montrer que le produit (2) est aussi **bien-défini**, i.e., pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} \qquad \text{plus précisément,} \qquad \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}.$$

Il suffit de vérifier si on a

$$(ac)(b'd') = (a'c')(bd).$$

En effet, comme

$$(ac)(b'd') - (a'c')(bd) = (ab')(cd') - (a'b)(c'd) = (ab'-a'b)(cd') + (a'b)(cd'-c'd) = 0,$$

on en déduit que le produit (2) est bien-défini.

Enfin, on vient de voir que sur l'ensemble des fractions, noté $\mathbb{Q}$, il y a deux opérations $+$ et $\times$.

La notation Σ et quelques propriétés de base

Soient $0 \leq m \leq n$ des entiers naturels, et soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres réels. On définit la *somme des* a_k *pour* k *variant de* m *à* n par

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

On pourra aussi écrire cette somme par

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k.$$

Soient $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ des nombres réels, et soir $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Ces deux propriétés s'appellent la **linéarité** de $\sum_{k=m}^{n}$. Voici quelques formules à retenir:

1. (suite arithmétique) Soient $a, d \in \mathbb{R}$ tels que $a_k = a + (k-1)d$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d).$$

2. (suite géométrique) Soient $a, r \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que $a_k = ar^{k-1}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

<u>Preuve</u>. Montrons 1. Posons $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Comme

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 = \sum_{l=1}^{n} a_{n+1-l},$$

(on a fait le changement d'indice k par $n+1-l$), on a

$$2S = S + S = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{n+1-k}).$$

Puisque

$$\begin{aligned} a_k + a_{n+1-k} =& (a + (k-1)d) + (a + (n+1-k-1)d) \\ =& 2a + ((k-1) + (n+1-k-1))\, d = 2a + (n-1)d, \end{aligned}$$

(cette dernière est *indépendant* de k !), on en déduit que

$$2S = \sum_{k=1}^{n} (2a + (n-1)d) = (2a + (n-1)d) \sum_{k=1}^{n} 1 = n(2a + (n-1)d), \quad \text{i.e.,} \quad S = \frac{1}{2} n(2a + (n-1)d).$$

Montrons 2. Posons $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors, on a

$$\begin{aligned} S =& a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}, \\ rS =& \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n. \end{aligned}$$

Calculons la différence, on en déduit que

$$(1-r)S = a - ar^n = a(1-r^n), \qquad \text{i.e.,} \qquad S = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

□

La troisième formule que l'on va travailler est la **formule du binôme de Newton**.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

   On pourra montrer cette formula par une interprétation combinatoire, ou bien par récurrence sur n.

Cette formule pourra généraliser comme suit: soient $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n \\ k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}.$$

On pourra montrer cette formule par récurrence sur m. (Exercice non-obligatoire ! Si ça vous paraît dur, vous reviendrez plus tard.)

La quatrième formule, un peu générale, est **sommes téléscopiques**: c'est la somme de forme

4. $\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1})$ avec deux entiers $m \leq n$. On a

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \underbrace{(a_m - a_{m-1})}_{k=m} + \underbrace{(a_{m+1} - a_m)}_{k=m+1} + \cdots + \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{k=n} = a_n - a_{m-1}.$$

<u>Exemple</u>. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme

$$\begin{aligned} & k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)(k+m) - (k-1)k(k+1)\cdots(k+m-1) \\ =&(m+1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{1}{m+1} \cdot n(n+1)\cdots(n+m).$$

Voyons un cas particulier $m = 2$. D'après cette formule, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

La formule pour la suite arithmétique ($a = d = 1$) implique que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 =& \sum_{k=1}^{n}(k(k+1) - k) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \\ =& \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)\left(2(n+2) - 3\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Cette formule est à retenir.

La dernière formule à retenir est suivante: soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

5. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} & (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ =& a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ =& (a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\ =& a^n - b^n. \end{aligned}$$