

## Compléments de CM2

### La notation $\Sigma$ et quelques propriétés de base

Soient  $0 \leq m \leq n$  des entiers naturels, et soient  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$  des nombres réels. On définit la somme des  $a_k$  pour  $k$  variant de  $m$  à  $n$  par

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

On pourra aussi écrire cette somme par

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k.$$

Soient  $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$  des nombres réels, et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, on a

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k, \quad \sum_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k.$$

Ces deux propriétés s'appellent la **linéarité** de  $\sum_{k=m}^n$ . Voici quelques formules à retenir:

1. (suite arithmétique) Soient  $a, d \in \mathbb{R}$  tels que  $a_k = a + (k-1)d$ . Alors,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d).$$

2. (suite géométrique) Soient  $a, r \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tels que  $a_k = ar^{k-1}$ .

$$\sum_{k=1}^n a_k = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Preuve. Montrons 1. Posons  $S = \sum_{k=1}^n a_k$ . Comme

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 = \sum_{l=1}^n a_{n+1-l},$$

(on a fait le changement d'indice  $k$  par  $n+1-l$ ), on a

$$2S = S + S = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n (a_k + a_{n+1-k}).$$

Puisque

$$\begin{aligned} a_k + a_{n+1-k} &= (a + (k-1)d) + (a + (n+1-k-1)d) \\ &= 2a + ((k-1) + (n+1-k-1))d = 2a + (n-1)d, \end{aligned}$$

(cette dernière est *indépendant* de  $k$  !), on en déduit que

$$2S = \sum_{k=1}^n (2a + (n-1)d) = (2a + (n-1)d) \sum_{k=1}^n 1 = n(2a + (n-1)d), \quad \text{i.e.,} \quad S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d).$$

Montrons 2. Posons  $S = \sum_{k=1}^n a_k$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}, \\ rS &= ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n. \end{aligned}$$

Calculons la différence, on en déduit que

$$(1-r)S = a - ar^n = a(1-r^n), \quad \text{i.e.,} \quad S = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

□

La troisième formule que l'on va travailler est la **formule du binôme de Newton**.

3. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On pourra montrer cette formule par une interprétation combinatoire, ou bien par récurrence sur  $n$ .

La quatrième formule, un peu générale, est **sommes télescopiques**: c'est la somme de forme

4.  $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1})$  avec deux entiers  $m \leq n$ . On a

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1}) = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m+1} - a_m) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_{m-1}.$$

Exemple. Soit  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Comme

$$\begin{aligned} &k(k+1)(k+2) \dots (k+m-1)(k+m) - (k-1)k(k+1) \dots (k+m-1) \\ &= (m+1)k(k+1)(k+2) \dots (k+m-1), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \dots (k+m-1) = \frac{1}{m+1} \cdot n(n+1) \dots (n+m).$$

Voyons un cas particulier  $m = 2$ . D'après cette formule, on a

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

La formule pour la suite arithmétique ( $a = d = 1$ ) implique que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n (k(k+1) - k) = \sum_{k=1}^n k(k+1) - \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2(n+2) - 3) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Cette formule est à retenir.

La dernière formule à retenir est suivante: soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$5. \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}&(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$