Compléments de CM3

Applications

Soient E et F deux ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, l'identité sur E. On pourra montrer que

1. l'application f est injective et
2. l'application g est surjective.

Montrons que l'application f est injective. Soient x, y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Alors, comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on a

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = y, \qquad \text{i.e.,} \qquad x = y.$$

Donc, l'application f est injective. Maintenant, montrons que l'application g est surjective. Soit $x \in E$. comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on a

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

c'est-à-dire, $f(x) \in F$ est un antécédent de $x \in E$. Donc, g est surjective.

Par conséquence, si les applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifient

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E, \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F,$$

alors, les deux applications f et g sont bijectives. En particulier, la réciproque d'une application bijective est aussi bijective.

Exemple de bijections

Ici, on donnera deux applications bijectives non-triviales.

1er exemple: Une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}; \qquad n \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}n & n : \text{pair}, \\ -\frac{n+1}{2} & n : \text{impair}. \end{cases}$$

Avant commencer à montrer sa bijectivité, essayons de voir comment cette fonction se comporte:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$f(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	$\cdots$

On constate que $f(\mathbb{N}_{pair}) = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{N}_{impair}) = -\mathbb{N}^*$, où

$$\mathbb{N}_{pair} = \{n \in \mathbb{N},\ n : \text{pair}\} \qquad \mathbb{N}_{impair} = \{n \in \mathbb{N},\ n; \text{impair}\}.$$

Montrons la surjectivité de f. Soit $n \in \mathbb{Z}$. (Il suffit de montrer que $\exists\, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(m) = n$.)

1.) Le cas $n \geq 0$. Dans ce cas, il suffit de poser $m = 2n$. En effet, $m = 2n \in \mathbb{N}$ est pair d'où

$$f(m) = f(2n) = \frac{1}{2} \cdot 2n = n.$$

2.) Le cas $n < 0$. Dans ce cas, il suffit de poser $m = -2n - 1$. En effet, $-2n$ est un entier pair strictement positif, donc $m = -2n - 1 \in \mathbb{N}$ et c'est un entier impaire. Donc, par définition, on a

$$f(m) = f(-2n-1) = -\frac{(-2n-1)+1}{2} = -\frac{-2n}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

(On pourra trouver cet m par l'équation $f(m) = n$.)

Dans les deux cas, nous avons trouvé $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(m) = n$, d'où l'application f est injective.

Ensuite, montrons l'injectivité de f. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $f(m) = f(n)$. (Il suffit de montrer que $m = n$.)

1.) Le cas $f(m) = f(n) \geq 0$. Dans ce cas, m et n sont pairs, donc par définition, on a

$$\frac{1}{2}m = f(m) = f(n) = \frac{1}{2}n \qquad \Longrightarrow \qquad m = n.$$

2.) Le cas $f(m) = f(n) < 0$. Dans ce cas, m et n sont pairs, donc par définition, on a

$$-\frac{m+1}{2} = f(m) = f(n) = -\frac{n+1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad m = n.$$

Dans les deux cas, nous avons montré que $m = n$, d'où f est injective.

$2^{\text{ème}}$ exemple: Une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2; \qquad n \mapsto \left(\frac{1}{2}(m+1)(m+2) - n, n - 1 - \frac{1}{2}m(m+1)\right)$$

avec un entier positif m vérifiant $\frac{1}{2}m(m+1) < n \leq \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. En effet, si on pose

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; \qquad (m,n) \longmapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n + 1,$$

on pourra montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^2}$, i.e., l'application g est la réciproque de f.