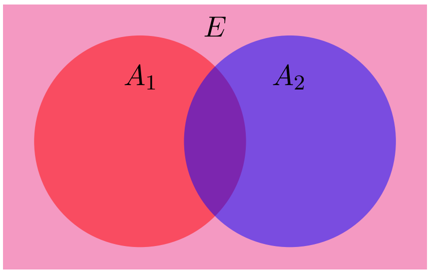
Compléments de CM4

Le principe d'inclusion-exclusion

Soit E un ensemble et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ parties finies de E. Le principe d'inclusion-exclusion donne une formule sur le cardinal de la partie $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pour $n = 2$, voici le diagramme de Venn:



Dans la somme $\mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2)$, il est claire que les éléments appartenant à $A_1 \cap A_2$ sont compté deux fois, d'où pour calculer $\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2)$, il faut soustraire $\mathrm{Card}(A_1 \cap A_2)$, i.e.,

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) - \mathrm{Card}(A_1 \cap A_2).$$

Plus généralement, le cardinal de la partie $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est donné par le **principe d'inclusion-exclusion**:

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}\right).$$

On pourra le montrer par récurrence. (Exercice: vérifier-le.)

Voici une application amusante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des applications bijective de $[\![1, n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même. Calculons, le nombre d'éléments sans point fixe, i.e., applications f vérifiant $f(i) \neq i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour en calculer, considérons la partie S_i de $\mathfrak{S}_n$ constituée des applications f fixant i, i.e., $f(i) = i$. Alors, nous sommes intéressés à calculer le cardinal du complémentaire de $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ dans $\mathfrak{S}_n$. Puisque $\mathrm{Card}(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_r}) = (n-r)!$ pour des entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$, d'après le principe d'inclusion-exclusion, on a

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} (n-r)! = -\sum_{r=1} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} (n-r)! = -n! \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!},$$

on en déduit que

$$\mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = n! \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}\right) = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Notons que $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}$, où e est le constant de Néper.