Compléments de CM7

Équation cubique

Ici, on travaille sur une équation algébrique de degré 3 de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. La méthode expliquée ci-dessous est appelée la méthode de Tartaglia-Cardan qui a été découverte par Scipione del Ferro en 1515.

Tout d'abord, on pose $x = y - \frac{1}{3}a$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c \\
&= \left(y^3 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)y^2 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^3\right) \\
&\quad + a\left(y^2 + 2\left(-\frac{1}{3}a\right)y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^2\right) + b\left(y + \left(-\frac{1}{3}a\right)\right) + c \\
&= y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3,
\end{aligned}$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2}$$

avec $p, q \in \mathbb{C}$. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $y = u + v$. Par définition, on a

$$y^3 + py + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Donc, si on trouve deux nombres complexes u et v vérifiant

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{et} \qquad 3uv + p = 0, \tag{3}$$

on obtiendra les solution de l'équation algébrique (2). Comme (3) implique que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3, \end{cases}$$

les deux nombres u^3 et v^3 sont des racines du polynôme

$$(T - u^3)(T - v^3) = T^2 - (u^3 + v^3)T + u^3v^3 = T^2 + qT - \frac{1}{27}p^3.$$

on pourra dire que

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \qquad \text{et} \qquad v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2},$$

Posons $j = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. On en déduit que les solutions de (3) sont

$$
\begin{aligned}
(u,v) = &\left(\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}, \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right),\\
&\left(j\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}, j^2\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right),\\
&\left(j^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}, j\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}\right),
\end{aligned}
$$

sachant que $j^3 = 1$. À chaque pair ci-dessus, la somme $u + v$ nous donne une solution de (2), et les solutions de (2) sont ainsi obtenues.

Équation quartique

L'équation en question est une équation algébrique de degré 4 de la forme

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. La résolution de telle équation a été découverte par Ludovico Ferrari (1522 - 1565).

Tout d'abord, on pose $x = y - \frac{1}{4}a$. Alors, on a

$$
\begin{aligned}
x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= \left(y - \frac{1}{4}a\right)^4 + a\left(y - \frac{1}{4}a\right)^3 + b\left(y - \frac{1}{4}a\right)^2 + c\left(y - \frac{1}{4}a\right) + d\\
=&y^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)y^2 + \left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)y + \left(d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4\right),
\end{aligned}
$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \tag{5}$$

Réécrivons cette équation sous la forme $y^4 = -py^2 - qy - r$, on ajoute à deux côtés $2zy^2 + z^2$ ($z \in \mathbb{C}$):

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z - p)y^2 - qy + (z^2 - r). \tag{6}$$

Choisissons le scalaire z pour que le côté droit soit un facteur carré, i.e., le discriminant du côté droit

$$\Delta := (-q)^2 - 4(2z - p)(z^2 - r)$$

soit nul. Notons que le scalaire z vérifie une équation cubique. Avec un tel z, l'équation (6) peut réécrire comme

$$(y^2 + z)^2 = (Az + B)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y^2 + z)^2 - (Ay + B)^2 = (y^2 + Ay + z + B)(y^2 - Ay + z - B) = 0,$$

avec deux scalaire A et B. Reste à résoudre ces deux équations de second degré.