Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2022–2023**
L1 | UE : Algèbre 1 (MATHS)

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{20} \\ n \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Exercice 2 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est une racine double de P.

1. Déterminer a et b.
2. Montrer que $-1 + i$ est une racine de P.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 Soit $f : l_2 \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{4i}{z},$$

où on l_2 est la droite définie par $l_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 2 \,\}$.

1. Donner une équation du cercle C de centre i et de rayon 1.
2. Montrer que $w = f(z)$ est un point sur C pour tout $z \in l_2$.
   Soit $F : l_2 \to C$ l'application définie par $F(z) = f(z)$.
3. F est-elle surjective ? Si oui, montrer-le. Sinon, décrire l'ensemble des $w \in C$ admettant au moins un antécédent par F.

Exercice 4 Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la translation de vecteur d'affixe $-\dfrac{1+i}{2}$ et $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la rotation de centre d'affixe 0 et d'angle α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}\right)$ pour lequel $\tan \alpha = \dfrac{1}{3}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner les expressions de $T(z)$ et $R(z)$.
2. Donner une formule explicite de la composée $T \circ R$. Y a-t-il une translation T' vérifiant $R \circ T' = T \circ R$? Si oui, décrire explicitement la transformation T'.
3. Déterminer l'image de la droite $\{\, z \mid (2-i)z + (2+i)\overline{z} = \sqrt{10} \,\}$ par $R \circ T$.

Exercice 5 Soit $\{T_n(X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes vérifiant $T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X$ et les relations suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est 2^{n-1}.
2. Montrer que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}_n = \{\, P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid P : \text{ polynôme unitaire de degré } n \,\}$.
   Montrer, par l'absurd, que
   $$\min_{P\in\mathcal{P}_n} \max_{x\in[-1,1]} |P(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$
   Indication : Le minimum est atteint par $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(X) \in \mathcal{P}_n$.