Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2022–2023**

L1 — UE : Algèbre 1 (INFO)

Contrôle Partiel 1 du 27/10/2022

Durée : 1 heure

CORRECTION

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Somme des carrés. (6 pts)

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Correction. (*4 pts*) Notons $P(n)$ l'assertion "$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

   Initialisation : Pour $n = 1$, on a

   $$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

   Ainsi, $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. En effet, on a

   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}.$$

   De plus, on a

   $$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6},$$

   ce qui prouve que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et donc $P(n+1)$ est vraie.

   On a donc montré que pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie.

2. En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$, de $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$.

   Correction. (*2 pts*) Soit $n \geq 1$, alors on a

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3},\end{aligned}$$

   où on a utilisé le fait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (formule donnée en cours).

Exercice 2 **Assertions mathématiques et quantificateurs. (6 pts)**

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$
$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,.$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).

   Correction. (*2 pts*) On a

$$\mathrm{non}(P) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) \neq y$$
$$\mathrm{non}(Q) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \neq y\,.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.

   Correction. (*2 pts*) Expliquons tout d'abord ce que signifient les assertions (P) et (Q). Il est facile de voir que :
   — (P) signifie "f est constante sur E" ;
   — (Q) signifie "f est surjective".
   Il est clair que l'application f définie dans cette question n'est pas constante. Il est aussi simple de montrer que f est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}_+$, alors

$$y = f(x) \iff y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \in \mathbb{R} \text{ ou } x = -\sqrt{y} \in \mathbb{R}.$$

   Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}_+$ admet au moins un antécédent par f, c'est-à-dire que f est surjective.

3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

   Correction. (*1 pt*) La fonction f n'est ni constante (ce qui est évident), ni surjective car (par exemple) le réel $y = 2$ n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$.

4. Donner un exemple d'une application telle que (P) et (Q) soient toutes les deux vraies.

   Correction. (*1 pt*) Si $f : \{2\} \to \{3\}$ est définie par $f(2) = 3$, alors il est clair que f est à la fois constante (c'est évident) et surjective car tout élément de l'ensemble d'arrivée, qui est donc nécessairement le réel $y = 3$, admet un antécédent dans l'ensemble de départ, qui est nécessairement le réel $x = 2$.

Exercice 3 **Application - Images directes et réciproques. (7 pts)**

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ l'application définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

1. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ? Justifier.

   Correction. (*2 pts*) L'application f n'est pas surjective car il est clair que le réel 1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}^*$. On a en effet

$$1 = f(x) \iff 0 = \frac{1}{x}$$

   et la dernière équation n'a pas de solution. L'application f n'est donc pas bijective. Montrons que f est injective. Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^*$, alors on a

$$f(x_1) = f(x_2) \iff 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_2} \iff \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \iff x_1 = x_2.$$

   En particulier, on a bien $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ et donc f est injective.

2. Déterminer (sans justification rigoureuse) $f(\{2\})$ et $f([-3,0[)$.

   Correction. (1 *pt*) On a $f(\{2\}) = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ et $f([-3,0[) = \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right]$.

3. Déterminer (sans justification rigoureuse) $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-2,2])$.

   Correction. (1 *pt*) On a $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ et $f^{-1}([-2,2]) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1,+\infty[$.

4. Montrer que l'application $g : \mathbb{R}_+^* \to]1,+\infty[$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x)$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

   Correction. (3 *pts*) Soit $y \in]1,+\infty[$, alors on a

$$y = g(x) \iff y = 1 + \frac{1}{x} \iff y - 1 = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y-1} \in \mathbb{R}_+^*$$

   car $y > 1$. Ainsi, y admet un unique antécédent par g dans $\mathbb{R}_+^*$, et donc g est bijective. Sa bijection réciproque est donc $g^{-1} :]1,+\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ donnée par $g^{-1}(y) = \dfrac{1}{y-1}$.

<u>Exercice 4</u> Opérations sur les ensembles (4 pts)

Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$.

1. Montrer que l'on a $A \subset B \subset C$.

   Correction. (2 *pts*) Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in B \cap C$ car $A \cup B = B \cap C$. En particulier, $x \in B$. On en déduit que $A \subset B$.

   Soit $x \in B$, alors de même $x \in A \cup B$ et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in C$. On en déduit que $B \subset C$ et donc on a bien montré que $A \subset B \subset C$.

2. Si de plus $A \cup C = A \cap B$, montrer que $A = B = C$.

   Correction. (2 *pts*) En utilisant la question précédente, on déduit de $C \cup A = A \cap B$ que $C \subset A \subset B$. En particulier, on a $C \subset A$ et $A \subset B \subset C$ (cf. question 1.). Par double inclusion, on en déduit donc que $A = B = C$.