Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2022–2023**

L1 | UE : Algèbre 1 (MATHS)

Contrôle Partiel 1 du 27/10/2022

Durée : 1 heure

CORRECTION

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Logique et Ensemble (6 pts).

1. Donner la négation de

$$(P) : \forall x_1 \in \mathbf{R}, \forall x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin(x_1) \neq \sin(x_2).$$

Correction. (2 *pts*)

$$non(P) : \ \exists x_1 \in \mathbf{R}, \exists x_2 \in \mathbf{R}, \sin(x_1) = \sin(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2$$

2. La proposition (P) est elle vraie ? Justifier.
Correction. (2 *pts*) La fonction sin est periodique de période 2π : $sin(x) = sin(x + 2\pi)$, donc (P) est fausse.

3. Soit A, B, C trois ensembles, montrer l'égalité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Correction. (2 *pts*) On va procéder par double inclusion.

— Soit $x \in A \setminus (B \cup C)$.
Par définition $x \in A$ et $x \notin B \cup C$. Par conséquent, x est dans A et x n'est ni dans B ni dans C. Donc, d'une part $x \in A$ et $x \notin B$ et d'autre part $x \in A$ et $x \notin C$. Cela revient à dire que $x \in A \setminus B$ et $x \in A \setminus C$. Ainsi, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Donc, pour tout $x \in A \setminus (B \cup C)$, on a que $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Donc

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

— Soit $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Par définition, $x \in A \setminus B$ et $x \in A \setminus C$. Comme $x \in A \setminus B$, on en déduit que $x \in A$ et $x \notin B$. De même, comme $x \in A \setminus C$, on en déduit que $x \in A$ et $x \notin C$. Finalement, x est dans A et x n'est ni dans B ni dans C. Donc $x \in A$ et $x \notin B \cup C$. Cela revient à dire que $x \in A \setminus (B \cup C)$. Donc, pour tout $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, on a que $x \in A \setminus (B \cup C)$. Donc

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C).$$

Finalement, par double inclusion, on en déduit que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Remarquons au passage qu'on aurait également pu raisonner par équivalences.

Exercice 2 **Somme (6 pts).**

Le but de cet exercice va être de calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

1. Soit $k \geq 1$, montrer que $(k(k+1)+1)^2 = k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2$.

   Correction. (1 *pt*) Par les identités remarquables usuelles, on obtient que

$$\begin{aligned}(k(k+1)+1)^2 &= k^2(k+1)^2 + 2k(k+1) + 1 \\ &= k^2(k+1)^2 + 2k^2 + 2k + 1 \\ &= k^2(k+1)^2 + (k^2+2k+1) + k^2 \\ &= k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2.\end{aligned}$$

2. En déduire que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}.$$

   Correction. (1 *pt*) En mettant tout au même dénominateur et en utilisant ensuite la question 1. , on a

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{(k(k+1)+1)^2}{k^2(k+1)^2}.\end{aligned}$$

   Donc, en prenant la racine carrée, il vient

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} &= \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

3. Trouver $a, b \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

   Correction. (2 *pts*) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

   En mettant tout au même dénominateur, on obtient que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

   Par conséquent, pour tout $k \geq 1$,

$$1 = (a+b)k + a.$$

Clairement, la seule solution pour qu'une telle chose soit vraie est que $a = 1$ et $a + b = 0$, c'est à dire $a = 1$ et $b = -1$. D'ailleurs, on remarque que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Correction. (2 *pts*) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par la question 2. , on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right) \\ &= n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

Par la question 3. , on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

On observe ci-dessus une somme téléscopique. Il en découle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Cela conclut la preuve.

<u>Exercice 3</u> Images directes et réciproques (5 pts).

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. $f(]-1,1[)$ et $f^{-1}(]3,5])$ avec $f\colon x \in \mathbf{R} \mapsto 2x^2 + 3$;

   Correction. (2×1 *pts*) La fonction f est un polynôme du second degré. De plus ce polynôme est déjà sous la forme canonique. On en déduit que f est minimale en $x = 0$ et que le minimum est 3. De plus f est paire. Tout cela implique que

$$f(]-1,1[) = [3, 2 \times 1^2 + 3[= [3,5[.$$

   Par ailleurs, concernant l'image réciproque demandée, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(]3,5]) &= \{x \in \mathbf{R}, 3 < 2x^2 + 3 \leqslant 5\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}, 0 < 2x^2 \leqslant 2\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}, 0 < x^2 \leqslant 1\} \\ &= [-1, 0[\cup]0, 1].\end{aligned}$$

2. $\tan(\{\pi/4\})$ et $\tan^{-1}([-1,1])$.

   Correction. (2×1.5 *pts*) On a $\tan(\{\pi/4\}) = \{1\}$ et $\tan^{-1}([-1,1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k\pi - \pi/4, k\pi + \pi/4]$

Exercice 4 **Injectivité et surjectivité (6 pts).**

1. Soit E, F deux ensembles et $f\colon E \to F$. Rappeler la définition et **donner un exemple** de f injective et de f surjective.

   Correction. (2 × 2 *pts*) f est injective ssi

   $$\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

   Par exemple, l'application

   $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

   est injective.

   En outre, f est surjective ssi

   $$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

   Par exemple, l'application

   $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}_+ \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

   est surjective.

2. Soit E un ensemble, soit $p\colon E \to E$ une application injective vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que

   $$\forall x \in E,\ p(x) = x.$$

   Correction. (2 *pts*) Soit $x \in E$. On sait que $p \circ p = p$. Par conséquent, $p \circ p(x) = p(x)$. Cela revient à dire que $p(p(x)) = p(x)$. Donc x et $p(x)$ ont la même image par p. Or p est injective. Donc $p(x) = x$. Finalement, on a bien prouvé que :

   $$\forall x \in E, p(x) = x.$$

   Autrement dit $p = id_E$.