Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2022–2023**

L1 | UE : Algèbre 1 (INFO)

Devoir Surveillé 2 du 08/12/2022

Durée : 1 heure

CORRECTION

<u>Exercice 1</u> Equations du second degré dans $\mathbb{C}$ ($5 = 3 + 2$ pts)

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $w = 1 + 2\sqrt{2}i$.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^2 + iz - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Correction.

1. Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminons x et y tels que $z^2 = w$, c'est-à-dire
$$x^2 - y^2 + 2ixy = 1 + 2\sqrt{2}i.$$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve
$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{et} \quad 2xy = 2\sqrt{2}.$$
De plus, on a $|z|^2 = |w|$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$. On doit ainsi résoudre le système
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \\ 2xy = 2\sqrt{2} \end{cases}$$
En ajoutant les deux premières équations, on obtient $2x^2 = 4$, et donc $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. En soustrayant la première équation à la deuxième, on obtient $2y^2 = 2$ et donc $y \in \{-1, 1\}$. La dernière équation nous permet de conclure que les deux couples de solutions sont donc $(\sqrt{2}, 1)$ et $(-\sqrt{2}, -1)$ correspondant aux points
$$z = \sqrt{2} + i \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{2} - i.$$

2. Pour résoudre l'équation du second degré $z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, on commence par calculer son discriminant
$$\Delta = i^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + 2 + 2\sqrt{2}i = 1 + 2\sqrt{2}i = w.$$
On a déjà calculer les racines de $\Delta = w$ dans la question précédentes, et on trouve donc les deux solutions de notre équations :
$$z_1 = \frac{-i + \sqrt{2} + i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-i - \sqrt{2} - i}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i.$$

Exercice 2 **Racines n-ièmes** ($7 = 2+2+2+1$ pts)

1. Donner les formes algébrique et exponentielle du nombre complexe $w = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.
2. Déterminer l'ensemble S_w des racines 6-ième du nombre complexe w.
3. Donner l'expression de la rotation f centrée en 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{9}$.
4. Montrer que $f(S_w)$ est l'ensemble des racines 6-ièmes d'un réel que l'on déterminera.

Correction.

1. La forme algèbrique est donnée par :
$$w = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{1+(\sqrt{3})^2} = -1+i\sqrt{3}.$$
On trouve la forme exponentielle en calculant le module $|w| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, et ainsi
$$w = -1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$
2. S_w est l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = w$, c'est à dire $z^6 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$. En notant $z = re^{i\theta}$ où $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient
$$r^6 = 2 \quad \text{et} \quad 6\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
ce qui donne $r = 2^{\frac{1}{6}}$ et $\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{6}, k \in \{0, 1, ..., 5\}$ et on a ainsi
$$S_w = \left\{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{ik\pi}{3}+\frac{i\pi}{9}}, k \in \{0, 1, ..., 5\}\right\}.$$
3. La rotation f centrée en 0 et d'angle $-\frac{\pi}{9}$ est donnée par
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{-\frac{i\pi}{9}}z.$$
4. Soit $z \in S_w$, alors $z = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{ik\pi}{3}+\frac{i\pi}{9}}$ pour un certain $k \in \{0, 1, ..., 5\}$. Ainsi
$$f(z) = f\left(2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{ik\pi}{3}+\frac{i\pi}{9}}\right) = e^{-\frac{i\pi}{9}}2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{ik\pi}{3}+\frac{i\pi}{9}} = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{ik\pi}{3}}.$$
De plus, on a, pour tout $k \in \{0, 1, ..., 5w\}$, $f(z)^6 = \left(2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{ik\pi}{3}}\right)^6 = 2e^{\frac{6ik\pi}{3}} = 2e^{2ik\pi} = 2$. On a donc montré que $f(S_w)$ est exactement l'ensemble des racines 6-ièmes de 2.

Exercice 3 **Equation Diophantienne** ($7 = 3+2+2$ pts)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer PGCD(323,391).
2. En déduire une solution $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $323u - 391v = 17$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $323x - 391y = 612$.

Correction.

1. L'algorithme d'Euclide nous donne :
$$\begin{aligned} 391 &= 1 \times 323 + 68 \\ 323 &= 4 \times 68 + 51 \\ 68 &= 1 \times 51 + 17 \\ 51 &= 3 \times 17. \end{aligned}$$
On a donc PGCD(391,323)=17.

2. On remonte l'Algorithme d'Euclide pour déterminer les entiers (u, v) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
17 &= 68 - 51 \\
17 &= 68 - (323 - 4 \times 68) \\
17 &= 5 \times 68 - 323 \\
17 &= 5 \times (391 - 323) - 323 \\
17 &= 5 \times 391 - 6 \times 323.
\end{aligned}$$

   On trouve donc la solution $(u, v) = (-6, -5)$.

3. Pour résoudre l'équation $323x - 391y = 612$, on commence par déterminer une solution particulière. Celle-ci se déduit de la question précédente en remarquant que $612 = 36 \times 17$. Ainsi, le couple $(x_0, y_0) = (-6 \times 36, -5 \times 36) = (-216, -180)$ est une solution de l'équation. On obtient ainsi

$$\begin{cases} 323x - 391y = 612 \\ 323 \times (-216) - 391 \times (-180) = 612 \end{cases}$$

   On soustrait membre-à-membre et on obtient $323(x + 216) - 391(y + 180) = 0$. Divisons l'équation par le PGCD de 323 et 391 qui vaut 17. On a ainsi

$$19(x + 216) = 23(y + 180).$$

   Comme 19 et 23 sont premiers entre eux, on en déduit par le Théorème de Gauss que 19 divise $y + 180$ et 23 divise $x + 216$, et on obtient ainsi

$$y + 180 = 19k, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad x + 216 = 23k, k \in \mathbb{Z},$$

   et donc $y = -180 + 19k, k \in \mathbb{Z}$ et $x = -216 + 23k, k \in \mathbb{Z}$.
   Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on vérifie que le couple $(x, y) = (-216 + 23k, -180 + 19k)$ est solution de l'équation car

$$323 \times (-216 + 23k) - 391(-180 + 19k) \times = 0.$$

   L'ensemble des solutions de l'équation diophantienne $323x - 391y = 612$ est donc

$$\{(-216 + 23k, -180 + 19k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

<u>Exercice 4</u> PGCD et PPCM ($4 = 2 + 2$ pts)

1. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) premiers entre eux et dont le produit vaut 24.
2. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $\text{PGCD}(a, b) = 4$ et $\text{PPCM}(a, b)$=96.

Correction.

1. Il est facile de remarquer que $24 = 2^3 \times 3$ et donc les produits donnant 24 sont donc $(1, 24)$, $(24, 1)$, $(2, 12)$, $(12, 2)$, $(3, 8)$, $(8, 3)$, $(4, 6)$ et $(6, 4)$. Les seuls couples d'entiers premiers entre eux sont donc

$$\{(1, 24), (24, 1), (3, 8), (8, 3)\}.$$

2. On calcule $\frac{\text{PPCM}(a,b)}{\text{PGCD}(a,b)} = \frac{96}{4} = 24$. On cherche tous les couples (a', b') premiers entre eux de produit 24. Ceux-ci sont donnés par la question précédente. Ainsi, en multipliant ces solutions par $\text{PGCD}(a, b) = 4$, on trouve

$$(a, b) \in \{(4, 96), (96, 4), (12, 32), (32, 12)\}.$$

Exercice 5 (2 pts) Trouver le reste de la division euclidienne de $6^{321} - 4^{237}$ par 5.

Correction.

En raisonnant modulo 5, on trouve, comme $6 \equiv 1 \ [5]$ et $4 \equiv -1 \ [5]$,

$$6^{321} - 4^{237} \equiv 1^{312} - (-1)^{237} \ [5] \equiv 1 - (-1) \ [5] = 2 \ [5].$$

Le reste de la division euclidienne de $6^{321} - 4^{237}$ par 5 est donc 2.