Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2022–2023**

L1 | UE : Algèbre 1 (MATHS)

Devoir Surveillé 2 du 05/12/2022

Durée : 1 heure

CORRECTION

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Racines n^{eme} ($6 = 2+1+1+2$ pts)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Ecrire $-i$ et $-1+i$ sous forme exponentielle.
   Correction. (2 pts) $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$, $-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

2. En déduire les racines n^{eme} de $-i$ et $-1+i$.
   Correction. (1 pts) Racines n^{eme} de $-i$ sont $\{e^{\frac{3\pi i}{2n}}e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Racines n^{eme} de $-1+i$ sont $\{\sqrt{2}^{\frac{1}{n}}e^{\frac{3\pi i}{4n}}e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 + i = 0$.
   Correction. (1 pts) Notons que $(z+i)\big(z-(-1+i)\big) = z^2 + z + 1 + i$.
   Ainsi les racines de $z^2 + z + 1 + i$ sont $-i$ et $-1+i$.

4. En déduire les solutions de l'équation $z^6 + z^3 + 1 + i = 0$.
   Correction. (2 pts) Soit $t = z^3$. Ainsi l'équation devient $t^2 + t + 1 + i = 0$.
   Par la question précédente, les solutions sont $t_1 = -i$, $t_2 = -1+i$.
   On veut de suite résoudre, $z^3 = t_i, i = 1, 2$, (c.a.d les racines 3^{eme} de $-i$ et de $-1+i$).
   Par la question 2, les racines 3^{eme} de $-i$ sont $\{e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3})}, k = 0, 1, 2\}$ et
   les racines 3^{eme} de $-1+i$ sont $\{\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3})}, k = 0, 1, 2\}$.
   Les 6 solutions de $z^6 + z^3 + 1 + i = 0$ sont donc - $\{e^{\frac{\pi i}{2}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{11\pi i}{6}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{\pi i}{4}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{11\pi i}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{19\pi i}{12}}\}$.

Exercice 2 Calcul de $\cos(2\pi/5)$ ($6 = 2+1+1+2$ pts)

Le but de cet exercice va être de calculer le cosinus de $2\pi/5$.

1. Vérifier que $\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ est une solution de $z^5 - 1 = 0$.
   Correction. (2 pts) On note que
   $$\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)\right)^5 - 1 = \exp(2i\pi) - 1 = 0.$$

2. En déduire que $\zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ vérifie une égalité
   $$\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0.$$

(Indication : $\zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(\cdots)$.)

Correction. (1 pt.) Comme $\zeta \neq 1$, on peut appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique avec ζ ce qui implique que

$$\frac{\zeta^5 - 1}{\zeta - 1} = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1.$$

Or, d'après la question 1, $\zeta^5 - 1 = 0$. On obtient donc

$$0 = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1.$$

De plus, comme $\zeta \neq 0$, on peut diviser par ζ^2 ce qui donne

$$\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0.$$

3. Posons $t = \zeta + \zeta^{-1}$. Trouver les deux entiers a et b vérifiant $t^2 + at + b = 0$.

   Correction. (1 pt) Remarquons que $t^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} + 2$. Par conséquent, d'après la question 2,

$$t^2 + t - 1 = \zeta^2 + \zeta^{-2} + 2 + \zeta + \zeta^{-1} - 1 = \zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0.$$

   On a donc $t^2 + at + b = 0$ avec $a = 1$ et $b = -1$.

4. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

   Correction. (2 pt) D'après la question 3, $t^2 + t - 1 = 0$. Il s'agit d'un simple trinôme à coefficients réels. Par conséquent, on trouve que $\zeta + \zeta^{-1} = t \in \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$. Or, rappelons que $\zeta = \exp(2i\pi/5)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\zeta + \zeta^{-1} &= \exp(2i\pi/5) + \exp(-2i\pi/5) \\
&= \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5) + \cos(-2\pi/5) + i\sin(-2\pi/5) \\
&= \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5) + \cos(2\pi/5) - i\sin(2\pi/5) \\
&= 2\cos(2\pi/5).
\end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}.$$

   On a donc 2 possibilités pour $\cos(2\pi/5)$. Il faut trouver un moyen pour déterminer laquelle des deux valeurs est la bonne. Ici l'astuce est de remarquer que, comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, on sait que $\cos(2\pi/5) > 0$. On en déduit donc que

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 3 Arithmétique ($7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 2$ pts)

Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Considérons l'assertion suivante

$$(Q) : \text{si } a^n - 1 \text{ est premier, alors } a = 2 \text{ et } n \text{ est premier.}$$

1. Donner la contraposition de l'assertion (Q) ainsi que la négation de la réciproque de (Q).

   Correction. (2pt) La contraposition de (Q) est

   $$a \neq 2 \text{ ou } n \text{ non premier} \Longrightarrow a^n - 1 \text{ non premier.}$$

   La réciproque de (Q) est

   $$a = 2 \text{ et } n \text{ premier } \Longrightarrow a^n - 1 \text{ est premier.}$$

   Par conséquent, la négation de la réciproque de (Q) est

   $$(a = 2 \text{ et } n \text{ premier}) \text{ et } a^n - 1 \text{ n'est pas premier.}$$

2. Montrer que $a - 1 | a^n - 1$.

   Correction. (1 pt) Comme $a \geq 2$, en particulier $a \neq 1$ donc on peut utiliser la formule de la somme des termes d'une suite géométrique ce qui donne

   $$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

   Par conséquent,

   $$a^n - 1 = (a - 1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right).$$

   Donc $a - 1 | a^n - 1$.

3. Pour k, l deux entiers strictement positifs, montrer que $2^k - 1 | 2^{kl} - 1$.

   Correction. (1 pt) $2^k \geq 2$ car $k \geq 1$. Donc il suffit d'appliquer la question 2 avec $a = 2^k$ et $n = l$.

4. En déduire que l'assertion (Q) est vraie.

   Correction. (1 pt) On va utiliser la question 1. Par contraposition, il suffit de supposer que $a \neq 2$ ou n non premier et de prouver que $a^n - 1$ est non premier. Supposons donc $a \neq 2$ ou n non premier. Si $a \neq 2$, on sait donc que $a \geq 3$ car on a supposé que a est un entier supérieur ou égal à 1 au début de l'exercice. Dans ce cas, d'après la question 2, $a - 1 | a^n - 1$. De plus comme $a \geq 3$, $a - 1 \geq 2$. De plus $a^n - 1 > a - 1$ car $n \geq 2$. Par conséquent $a^n - 1$ est non premier.
   On peut donc maintenant supposer que $a = 2$ et n est non premier. Par conséquent, il existe deux entiers k et l supérieurs ou égaux à 2 tels que $kl = n$. D'après la question 3, $2^k - 1 | 2^{kl} - 1 = 2^n - 1 = a^n - 1$. Donc $a^n - 1$ est non premier car $2 < 2^k - 1 < a^n - 1$. Cela conclut la preuve.

5. En vérifiant que $2047 = 23 \times 89$, montrer que la réciproque de (Q) est fausse.

   Correction. (2pts) On remarque que $2047 = 2^{11} - 1 = 23 \times 89$. Par conséquent $2^{11} - 1$ n'est pas premier alors que 11 est premier. Donc d'après la question 1, la réciproque de Q est fausse pour n=11.

Exercice 4 **Équation diophantienne** $(6 = 2 + 2 + 2$ pts $)$

1. Calculer le PGCD de 171 et 48.

   Correction. (2 *pts*) L'algorithme d'Euclide nous donne $PGCD(171, 48) = 3$

$$\begin{aligned}171 &= 48 \times 3 + 27\\ 48 &= 27 \times 1 + 21\\ 27 &= 21 \times 1 + 6\\ 21 &= 6 \times 3 + 3\\ 3 &= 3 \times 1 + 0.\end{aligned}$$

2. Donner un couple d'entiers solution de l'équation diophantienne $(E) : 48x + 171y = 3$.

   Correction. (2 *pts*) On remonte l'algorithme d'Euclide ce qui nous donne $(x, y) = (25, -7)$

$$\begin{aligned}&3 = 21 - 6 \times 3\\ &3 = 21 - 3 \times (27 - 21)\\ &3 = 48 - 27 - 3 \times 27 + 3 \times (48 - 27)\\ &3 = 48 - 171 + 3 \times 48 - 3 \times (171 - 3 \times 48) + 3 \times 48 - 3 \times (171 - 3 \times 48)\\ &3 = 48 \times 25 - 7 \times 171.\end{aligned}$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne (E) :$48x + 171y = 3$.

   Correction. (2 *pts*) D'après la question précédente, une solution particulière est $(x, y) = (25, -7)$. On remarque qu'on peut diviser des deux côtés de l'équation par 3 et on se retrouve à résoudre : $16 \times x + 57 \times y = 1$ avec 16 et 57 premiers entre eux. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}16 \times x + 57 \times y &= 16 \times 25 - 57 \times 7\\ 16 \times (x - 25) &= 57 \times (-y - 7).\end{aligned}$$

   D'après le théorème de Gauss, comme $16 \wedge 57 = 1$, on a $16 | (-y-7)$ ce qui nous donne $16 \times k = -y-7$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ d'où $y = -7 - 16 \times k$. Il suffit de remplacer dans l'équation pour trouver $x = 25 + 57 \times k$.