
Exercice

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

<u>Exercice 1</u> Somme

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)$.

<u>Exercice 2</u> Assertions mathématiques et quantificateurs.

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$\begin{aligned} (P): &\quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y \\ (Q): &\quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,. \end{aligned}$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

<u>Exercice 3</u> Application - Images directes et réciproques.

1. Soit $f : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbf{R}; x \mapsto \tan x$. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
2. Montrer que l'application $g :]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

<u>Exercice 4</u> Soient A, B et C trois parties dans un ensemble E.

1. Montrer que l'on a $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
2. Montrer que l'on a $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.