Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2022–2023**

L1 UE : Algèbre 1 (INFO)

Devoir Surveillé 1 du 27/10/2022

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

<u>Exercice 1</u> Somme des carrés (6 pts).

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$.

<u>Exercice 2</u> Assertions mathématiques et quantificateurs (6 pts).

Soient E et F deux ensemble et $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$
$$(Q) : \quad \forall y \in F \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,.$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.
4. Donner un exemple d'une application telle que (P) et (Q) soient toutes les deux vraies.

<u>Exercice 3</u> Application - Images directes et réciproques (7 pts).

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ l'application définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

1. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ? Justifier.
2. Déterminer (sans justification rigoureuse) $f(\{2\})$ et $f([-3, 0[)$.
3. Déterminer (sans justification rigoureuse) $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-2, 2])$.
4. Montrer que l'application $g : \mathbb{R}_+^* \to]1, +\infty[$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x)$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

<u>Exercice 4</u> (4 pts). Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$.

1. Montrer que l'on a $A \subset B \subset C$.
2. Si de plus $A \cup C = A \cap B$, montrer que $A = B = C$.