

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Logique et Ensemble.

1. Donner la négation de

$$(P) : \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin(x_1) \neq \sin(x_2).$$

2. La proposition (P) est elle vraie ? Justifier.
3. Soit A, B, C trois ensembles, montrer l'égalité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Exercice 2 Somme.

1. Soit $k \geq 1$, vérifier que $k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)$.
2. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 - k + 1} + \frac{b}{k^2 + k + 1}.$$

3. En déduire la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Exercice 3 Images directes et réciproques.

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. $f^{-1}] - \infty, 0]$, avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + e^{-x}$;
2. $f(\mathbb{R})$ avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x^{-x}$.

Exercice 4 Injectivité et surjectivité.

1. Soient E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$. Montrer que si $g \circ f$ est bijective, f est injective et g est surjective.
2. Donner un exemple d'une application d'un ensemble E dans E qui est injective mais pas surjective.