

Devoir Surveillé 1 du 24/10/2022

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Logique et Ensemble (6 pts).

1. Donner la négation de

$$(P) : \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin(x_1) \neq \sin(x_2).$$

2. La proposition (P) est elle vraie ? Justifier.
3. Soit A, B, C trois ensembles, montrer l'égalité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Exercice 2 Somme (6 pts).

Le but de cet exercice va être de calculer la somme

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

1. Soit $k \geq 1$, montrer que $(k(k+1) + 1)^2 = k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2$.
2. En déduire que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}.$$

3. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

4. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 3 Images directes et réciproques (5 pts).

Trouver les ensembles suivants. Justifier votre réponse.

1. $f([-1, 1])$ et $f^{-1}([3, 5])$ avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^2 + 3$;
2. $\tan(\{\pi/4\})$ et $\tan^{-1}([-1, 1])$.

Exercice 4 Injectivité et surjectivité (6 pts).

1. Soit E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Rappeler la définition et **donner un exemple** de f injective et de f surjective.
2. Soit E un ensemble, soit $p : E \rightarrow E$ une application injective vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que

$$\forall x \in E, p(x) = x.$$