

Devoir Surveillé 2 du 05/12/2022

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Racines n^{eme} (6 = 2 + 1 + 1 + 2 pts)Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Ecrire $-i$ et $-1 + i$ sous forme exponentielle.
2. En déduire les racines n^{eme} de $-i$ et $-1 + i$.
3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + z + 1 + i = 0$.
4. En déduire les solutions de l'équation $z^6 + z^3 + 1 + i = 0$.

Exercice 2 Calcul de $\cos(2\pi/5)$ (6 = 2 + 1 + 1 + 2 pts)Le but de cet exercice va être de calculer le cosinus de $2\pi/5$.

1. Vérifier que $\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ est une solution de $z^5 - 1 = 0$.
2. En déduire que $\zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ vérifie une égalité

$$\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0.$$

(Indication : $\zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(\dots)$.)

3. Posons $t = \zeta + \zeta^{-1}$. Trouver les deux entiers a et b vérifiant $t^2 + at + b = 0$.
4. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 3 Arithmétique (7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 2 pts)Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Considérons l'assertion suivante(Q) : si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

1. Donner la contraposition de l'assertion (Q) ainsi que la négation de la réciproque de (Q).
2. Montrer que $a - 1 | a^n - 1$.
3. Pour k, l deux entiers strictement positifs, montrer que $2^k - 1 | 2^{kl} - 1$.
4. En déduire que l'assertion (Q) est vraie.
5. En vérifiant que $2047 = 23 \times 89$, montrer que la réciproque de (Q) est fausse.

Exercice 4 Équation diophantienne (6 = 2 + 2 + 2 pts)

1. Calculer le PGCD de 171 et 48.
2. Donner un couple d'entiers solution de l'équation diophantienne (E) : $48x + 171y = 3$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne (E) : $48x + 171y = 6$.