Annexe sur Cardinal

Cardinal

Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B ont la **même cardinalité** s'il existe une application bijective entre A et B.

Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il existe une application bijective entre E est

1. le vide $\varnothing$, ou
2. l'ensemble $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

Sinon, on dit que E est un ensemble **infini**.

Le **cardinal** E, noté $\mathrm{Card}(E)$ (, $\sharp E$ ou bien $|E|$), est 0 pour le cas $E = \varnothing$ et n pour le cas $E = [\![1, n]\!]$.

Exemples. Soit E un ensemble fini de $\mathrm{Card}(E) = n$.

1. $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, posons $\mathcal{P}(E)_k = \{\, X \in \mathcal{P}(E) \,|\, \mathrm{Card}(X) = k \,\}$. Alors,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)_k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(= \frac{n!}{k!(n-k)!} \right).$$

   Ces nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les **coefficients binomiaux**.

Soient E et F deux ensembles de $\mathrm{Card}(E) = n$ et $\mathrm{Card}(F) = k$.

1. Le cardinal de l'ensemble des applications de F dans E est n^k.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le cardinal de l'ensemble des applications injectives de F dans E est

$$\prod_{r=1}^{k} (n - (r-1)) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

   appelé l'**arrangement**.
3. Pour $k \geqslant n$, le cardinal de l'ensemble des applications surjectives de F dans E est

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k.$$

   Une preuve de cette formule utilise ce que l'on appelle le **principe d'inclusion-exclusion**, expliqué ci-dessous. (Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, poser $A_i = \{ f : F \to E \,|\, i \notin \mathrm{Im}\, f \}$ et appliquer le principe.)

Georg Cantor (1845 - 1918) a montré en 1891 le théorème suivant:

<u>Théorème</u>. Aucune application de l'ensemble E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est surjective. $\square$

<u>Preuve</u>. Supposons qu'il y aie une application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Posons

$$X = \{\, x \in E \,|\, x \notin f(x) \,\}.$$

C'est une partie de E, donc un élément de $\mathcal{P}(E)$. Montrons que $X \notin \operatorname{Im} f$.

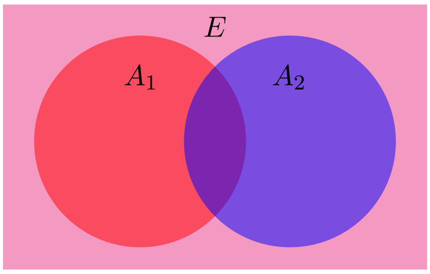
En effet, par hypothèse, il existe un élément $a \in E$ tel que $X = f(a)$. Si $a \in X$, alors, $a \notin f(a) = X$, i.e., $a \notin X$. Si $a \in X$, alors, $a \notin f(a) = X$ d'où $a \in X$. C'est une contradiction. Donc, par l'absurd, on en déduit que $X \notin \operatorname{Im} f$, i.e., f n'est pas surjective. $\square$

Par conséquence, les cardinalités de E et de $\mathcal{P}(E)$ sont jamais la même. Par conséquence, il existe une infinité de l'« **infini** ».

Soit E un ensemble infini. Lorsque le cardinal de E est le même que le cardinal de $\mathbb{N}$, on dit que l'ensemble E est **dénombrable**. Sinon, on dit que E est **non dénombrable**. Par exemple, les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrable. En particulier, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des fractions rationnelles est dénombrable ! Cependant, on pourra montrer que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est non dénombrable...

Le principe d'inclusion-exclusion

Soit E un ensemble et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ parties finies de E. Le principe d'inclusion-exclusion donne une formule sur le cardinal de la partie $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pour $n = 2$, voici le diagramme de Venn:



Dans la somme $\mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2)$, il est claire que les éléments appartenant à $A_1 \cap A_2$ sont comptés deux fois, d'où pour calculer $\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2)$, il faut soustraire $\mathrm{Card}(A_1 \cap A_2)$, i.e.,

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) - \mathrm{Card}(A_1 \cap A_2).$$

Plus généralement, le cardinal de la partie $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est donné par le **principe d'inclusion-exclusion**:

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}\right).$$

On pourra le montrer par récurrence. (Exercice: vérifier-le.)

Voici une application amusante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des applications bijective de $[\![1, n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même. Calculons, le nombre d'éléments sans point fixe, i.e., applications f vérifiant $f(i) \neq i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour en calculer, considérons la partie S_i de $\mathfrak{S}_n$ constituée des applications f fixant i, i.e., $f(i) = i$. Alors, nous sommes intéressés à calculer le cardinal du complémentaire de $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ dans $\mathfrak{S}_n$. Puisque $\mathrm{Card}(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_r}) = (n-r)!$ pour des entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$, d'après le principe d'inclusion-exclusion, on a

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} (n-r)! = -\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} (n-r)! = -n! \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!},$$

on en déduit que

$$\mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = n!\left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}\right) = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Notons que $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}$, où e est le constant de Néper.