Résumé de CM1

Entiers naturels et relatifs Rappelons

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\} : \text{ l'ensemble des entiers naturels,}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} : \text{ l'ensemble des entiers relatifs.}$$

Sur $\mathbb{N}$, l'**addition**(= la somme) $+$ et la **multiplication**(= le produit) $\times$ ou $\bullet$ sont définies. L'addition $+$ vérifie

1. (**Associativité**) $(a+b)+c = a+(b+c)$,
2. (l'**élément neutre**) $a + 0 = 0 + a = a$,
3. (**Commutativité**) $a + b = b + a$,

et la multiplication $\times$ vérifie

4. (**Associativité**) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$,
5. (l'**élément neutre**) $a \times 1 = 1 \times a = a$,
6. (**Commutativité**) $a \times b = b \times a$.

De plus, ces deux opérations vérifient

7. (**Distributivité**) $(a+b) \times c = a \times c + b \times c, \quad a \times (b+c) = a \times b + a \times c.$

Comme on sait, on peut *étendre* ces opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{N}$ à l'ensemble $\mathbb{Z}$. On pourra vérifier que ces opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{Z}$ les propriétés 1. à 7.. De plus, pour l'addition $+$, elle vérifie la propriété suivante:

8. (la **symétrie** ou l'**opposé**) pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe (un unique) $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a + a' = a' + a = 0$. Notons cet élément a' par $-a$.

Fractions et des opérations

Une **fraction** est un nombre qui s'écrit sous forme de $\dfrac{a}{b}$ avec deux entiers relatifs a et $b \neq 0$. On décrète que

$$\text{les deux fractions } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{a'}{b'} \text{ sont égaux si et seulement si } ab' = a'b.$$

Voyons ce que signifie cette définition. Une propriété tout simple est que, $\forall\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire, on peut ≪ simplifier ≫. (Cette égalité est claire car $(am)b = a(mb) = a(bm)$.)

Maintenant, nous allons `définir` deux opérations: l'**addition** $+$ et la **multiplication**(= le produit) $\times$ ou $\bullet$.

Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit la somme $+$ par la formule suivante:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}. \tag{1}$$

($A{:=}B$ signifie $\ll$ A est défini par B $\gg$.) C'est formule est $\ll$ naturelle $\gg$ d'un sens, car

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Est-ce que c'est une bonne définition ?, i.e.(= *id est* = c'est-à-dire), on peut se poser une question (très importante) suivante: comme ily a plusieurs expressions pour une fraction, on se demande si le deuxième membre de (1) ne dépend pas de choix d'expressions. Vérifions si, pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'},$$

plus précisément,

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}.$$

Pour cela, il nous suffit de voir si l'égalité suivante est vraie:

$$(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd.$$

Par hypothèse $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a

$$ab' = a'b \qquad \text{et} \qquad cd' = c'd.$$

Puisque

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' - (a'd'+b'c')bd =& (ad)(b'd') + (bc)(b'd') - (a'd')(bd) - (b'c')(bd)\\ =& (ad)(b'd') - (a'd')(bd) + (bc)(b'd') - (b'c')(bd)\\ =& (ab'-a'b)dd' + bb'(cd'-c'd) = 0,\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}.$$

Donc, la somme (1) ne dépend pas de choix des expressions de deux fractions. En jargon mathématique, on dit que la somme (1) est **bien-définie**.

Ensuite, Pour deux fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on définit le produit $\times$ par la formule suivante:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}. \tag{2}$$

De même (que la somme $+$), on pourra montrer que le produit (2) est aussi **bien-défini**, i.e., pour $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a toujours

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} \qquad \text{plus précisément,} \qquad \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}.$$

Il suffit de vérifier si on a

$$(ac)(b'd') = (a'c')(bd).$$

En effet, comme

$$(ac)(b'd') - (a'c')(bd) = (ab')(cd') - (a'b)(c'd) = (ab' - a'b)(cd') + (a'b)(cd' - c'd) = 0,$$

on en déduit que le produit (2) est bien-défini.

Enfin, on vient de voir que sur l'ensemble des fractions, noté $\mathbb{Q}$, il y a deux opérations $+$ et $\times$.

$\boxed{\textbf{Exponentielle}}$

Soient a un nombre réel non nul, m un entier strictement positif. Posons

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m}.$$

Pour deux entiers strictement positifs m et n, on a

$$\begin{aligned}
a^m \times a^n &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} \\
&= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n} = a^{m+n}, \\
(a^m)^n &= \underbrace{(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m}) \times \cdots\cdots \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m})}_{n} \\
&= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{mn} = a^{mn},
\end{aligned}$$

i.e.($=$ *id est* $=$ c'est-à-dire),

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}. \tag{3}$$

Posons

$$a^0 = 1.$$

On peut vérifier que les formules (3) sont valables même pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Définissons a^{-m} pour $m \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

on pourra vérifier que les formules (3) sont aussi valables pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

Notons que, pour deux nombres réels a et b non null et un nombre entier relatif m, on a aussi

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m. \tag{4}$$

Question: jusqu'où peut-on étendre les formules (3) et (4)?

Soient $a \neq 0$ un nombre réel, m un entier relatif et n un entier strictement positif. Comment peut-on définir $a^{\frac{m}{n}}$? Ici, on suppose que $a > 0$. Sous cette condition, on pourra poser

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Alors, on pourra montrer que, pour tous deux nombres réels a et b strictement positifs et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x.$$