Résumé de CM11

Racines d'un polynôme $\mathbb{K}$: un corps commutatif, e.g., $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc.

Théorème Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

1. $P(\alpha) = 0$,
2. $X - \alpha$ divise P.

On dit alors que α est une **racine** de P. □

Preuve D'après la division euclidienne de P par $X - \alpha$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ et un constant $R \in \mathbb{K}$ tels que

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X) + R.$$

Évaluons X en α dans cette identité, on obtient $R = P(\alpha)$. □

Appliquant ce théorème plusieurs fois, on peut montrer le corollaire suivant:

Corollaire Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré d. Alors, P a au plus d racines. □

N.B. Si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$, une racine d'un polynôme P n'existe pas forcément dans $\mathbb{K}$.
Cependant, dans $\mathbb{C}$, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, il en existe toujours. □

La proposition suivante est une conséquence simple du théorème de D'Alembert-Gauss:

Proposition

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. □

Pour le deuxième énoncé, notons que si un polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine complexe α, alors son conjugé est aussi une racine de P, puisque $0 = \overline{P(\alpha)} = \overline{P}(\overline{\alpha}) = P(\overline{\alpha})$.

Définition Soit P un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une racine d'**ordre** (ou de la **multiplicité**) m si $(X - \alpha)^m | P$ et $(X - \alpha)^{m+1} \nmid P$. □

On note la dérivée k-ième de P par $P^{(k)}$. L'ordre d'une racine peut -être caractérisée en terme des polynômes dérivés:

Théorème Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

1. $(X - \alpha)^m$ divise P,
2. $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$. □

Ce théorème est montré essentiellement par la formule de Leibniz:

$$(PQ)^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)}(X) Q^{(k-i)}(X).$$

Remarque. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$P(X) = P(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha)(X-\alpha)^k \qquad \text{(Formule de Taylor)}.$$

C'est le « **développement limité** » du polynôme P. □

Interpolation de Lagrange* Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un problème suivant:

Étant donné $(\alpha_0, \lambda_0), (\alpha_1, \lambda_1), \cdots, (\alpha_n, \lambda_n) \in \mathbb{K}^2$ avec les α_i's tous distincts, trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré (au plus) n vérifiant $P(\alpha_i) = \lambda_i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$.

En terme de graphe d'une fonction polynomiale, c'est la même question de trouver une fonction polynomiale $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dont le graphe Γ_f (une courbe de degré n) passe les points (α_i, λ_i) $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

Pour cette question, on pose

$$Q(X) := \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (X - \alpha_i) \qquad \widetilde{Q}_i(X) := \frac{Q(X)}{X - \alpha_i} = (X-\alpha_0)\cdots(X-\alpha_{i-1})(X-\alpha_{i+1})\cdots(X-\alpha_n)$$

pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Il est claire que, pour $0 \leqslant j \neq i \leqslant n$, on a $\widetilde{Q}_i(\alpha_j) = 0$, et

$$\widetilde{Q}_i(\alpha_i) = \prod_{0 \leqslant j \neq i \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j) = (\alpha_i - \alpha_0)\cdots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \cdot (\alpha_i - \alpha_n) \neq 0.$$

Donc, posons $Q_i(X) = \dfrac{\widetilde{Q}_i(X)}{\widetilde{Q}_i(\alpha_i)}$, on obtient

$$Q_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}.$$

Ce $\delta_{i,j}$ s'appelle le **delta de Kronecker**. À l'aide des polynôme $Q_i(X)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, appelés les **polynômes interpolateurs de Lagrange**, on peut exprimer le polynôme P comme suit:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i(X).$$

Alors, ce polynôme P, appelé le polynôme d'**interpolation de Lagrange**, vérifie

$$P(\alpha_i) = \lambda_i \qquad 0 \leqslant \forall\, i \leqslant n.$$

$\boxed{\textbf{Fractions rationnelles}}$ $\mathbb{K}$: un corps commutatif, e.g., $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc.

Ici, pour définir le corps $\mathbb{K}(X)$ des **fractions rationnelles** à partir de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$, nous allons procéder de la même manière que la construction du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (cf. le résumé de CM1).

Une **fraction rationnelle** est une expression (ou formule) qui s'écrit sous forme de $\dfrac{P}{Q}$ avec deux polynômes P et $Q \neq 0$. On décrète que

$$\text{les deux fractions rationnelles } \frac{P}{Q} \text{ et } \frac{P'}{Q'} \text{ sont égaux si et seulement si } PQ' = P'Q.$$

Voyons ce que signifie cette définition. Une propriété tout simple est que, $\forall\, S(X) \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$,

$$\frac{PS}{QS} = \frac{P}{Q},$$

c'est-à-dire, on peut « simplifier ». (Cette égalité est claire car $(PS)Q = P(SQ) = P(QS)$.)

Maintenant, nous allons `définir` deux opérations: l'**addition** $+$ et la **multiplication**(= le produit) $\times$ ou $\bullet$.

Pour deux fraction $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{S}{T}$, on définit la somme $+$ par la formule suivante:

$$\frac{P}{Q} + \frac{S}{T} := \frac{PT + QS}{QT}. \tag{1}$$

C'est formule est « naturelle » d'un sens, car

$$\frac{P}{Q} + \frac{S}{T} = \frac{PT}{QT} + \frac{QS}{QT} = \frac{PT + QS}{QT}.$$

Est-ce que c'est bien définie ?, i.e., on peut se poser une question (très importante) suivante: comme ily a plusieurs expressions pour une fraction, on se demande si le deuxième membre de (1) ne dépend pas de choix d'expressions. Vérifions si, pour $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{S_1}{T_1} = \dfrac{S_2}{T_2}$, on a toujours

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{S_1}{T_1} = \frac{P_2}{Q_2} + \frac{S_2}{T_2},$$

plus précisément,

$$\frac{P_1T_1 + Q_1S_1}{Q_1T_1} = \frac{P_2T_2 + Q_2S_2}{Q_2T_2}.$$

Pour cela, il nous suffit de voir si l'égalité suivante est vraie:

$$(P_1T_1 + Q_1S_1)Q_2T_2 = (P_2T_2 + Q_2S_2)Q_1T_1.$$

Par hypothèse $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{S_1}{T_1} = \dfrac{S_2}{T_2}$, on a

$$P_1Q_2 = P_2Q_1 \qquad \text{et} \qquad S_1T_2 = S_2T_1.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&(P_1T_1 + Q_1S_1)Q_2T_2 - (P_2T_2 + Q_2S_2)Q_1T_1 \\
=&(P_1T_1)(Q_2T_2) + (Q_1S_1)(Q_2T_2) - (P_2T_2)(Q_1S_1) - (Q_2S_2)(Q_1T_1) \\
=&(P_1T_1)(Q_2T_2) - (P_2T_2)(Q_1T_1) + (Q_1S_1)(Q_2T_2) - (Q_2S_2)(Q_1T_1) \\
=&(P_1Q_2 - P_2Q_1)T_1T_2 + Q_1Q_2(S_1T_2 - S_2T_1) = 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\frac{P_1T_1 + Q_1S_1}{Q_1T_1} = \frac{P_2T_2 + Q_2S_2}{Q_2T_2} \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{P_1}{Q_1} + \frac{S_1}{T_1} = \frac{P_2}{Q_2} + \frac{S_2}{T_2}.$$

Donc, la somme (1) est **bien-définie**.

Ensuite, Pour deux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{S}{T}$, on définit le produit $\cdot$ par la formule suivante:

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{T} := \frac{PS}{QT}. \tag{2}$$

De même (que la somme $+$), on pourra montrer que le produit (2) est aussi **bien-défini**, i.e., pour $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ et $\frac{S_1}{T_1} = \frac{S_2}{T_2}$, on a toujours

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{S_1}{T_1} = \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{S_2}{T_2} \qquad \text{plus précisément,} \qquad \frac{P_1S_1}{Q_1T_1} = \frac{P_2S_2}{Q_2T_2}.$$

Il suffit de vérifier si on a

$$(P_1S_1)(Q_2T_2) = (P_2S_2)(Q_1T_1).$$

En effet, comme

$$\begin{aligned}
&(P_1S_1)(Q_2T_2) - (P_2S_2)(Q_1T_1) = (P_1Q_2)(S_1T_2) - (P_2Q_1)(S_2T_1) \\
=&(P_1Q_2 - P_2Q_1)(S_1T_2) + (P_2Q_1)(S_1T_2 - S_2T_1) = 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que le produit (2) est bien-défini.

Enfin, on vient de voir que deux opérations $+$ et $\cdot$ sont définies sur l'ensemble des fractions rationnelles, noté $\mathbb{K}(X)$. On pourra montrer que $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un corps commutatif.