Université Claude Bernard Lyon 1 UE Algèbre 1
Semestre d'automne 2023-2024

Fraction Rationnelles

Exercice 1 *Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, des fractions rationnelles suivantes.*

a) $\dfrac{1}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{X^2-1}$.

b) $\dfrac{X+1}{X^2+1}$, $\dfrac{X^2}{X^3-1}$.

c) $\dfrac{X-1}{X^2(X^2+1)}$, $\dfrac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$.

d) $\dfrac{X^4}{X^2-3X+2}$, $\dfrac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$.

Quelques corrections.

Le cas a) : Travaillons sur la première fraction rationnelle. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2}.$$

Multiplions les deux membres par $(X+1)(X-2)$ (le dénominateur du premier membre) :

$$1 = \frac{a(X+1)(X-2)}{X+1} + \frac{b(X+1)(X-2)}{X-2} = a(X-2) + b(X+1).$$

Évaluer X (dans cette identité) en 2 [1] (qui annule le premier facteur $X-2$) [2] :

$$1 = a \cdot (2-2) + b \cdot (2+1) = 3b \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{1}{3}.$$

Évaluer X (dans cette identité) en -1 (qui annule le premier facteur $X+1$) :

$$1 = a \cdot ((-1)-2) + b \cdot ((-1)+1) = -3a \qquad \Longrightarrow \qquad a = -\frac{1}{3}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-2}\right).$$

1. C'est-à-dire, remplacer X par 2.
2. C'est-à-dire, le facteur $X-2$ devient 0.

Pour la deuxième fraction rationnelle, de façon similaire, on obtient

$$\frac{X}{(X+1)(X-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{2}{X-2}\right).$$

Pour la troisième fraction rationnelle, de façon similaire, on obtient

$$\frac{X}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}\right).$$

Le cas b) : Dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction rationnelle

$$\frac{X+1}{X^2+1}$$

est déjà un élément simple. dans $\mathbb{C}[X]$, de façon similaire au cas a), on trouveras

$$\frac{X+1}{X^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-i}{X-i} + \frac{1+i}{X+i}\right).$$

Pour la deuxième fraction rationnelle, comme $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{X^2}{X^3-1} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1}.$$

Multiplion les deux membres par $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$:

$$X^2 = (aX+b)(X-1) + c(X^2+X+1).$$

Évaluer X (dans cette identité) en 1, on obtient $1 = c(1+1+1) = 3c$, i.e., $c = \frac{1}{3}$.
Évaluer X en 0, on obtient $0 = -b + c$, i.e., $b = c = \frac{1}{3}$. Enfin, en comparant le coefficient de X^2, par exemple, on obtient $a = \frac{2}{3}$, d'où

$$\frac{X^2}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2X+1}{X^2+X+1} + \frac{1}{X-1}\right).$$

Le cas c) : Comme on voit que

$$\frac{1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1},$$

(posons $X^2 = Y$, par exemple, et calculer comme dans le cas a)), on obtient

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{X-1}{X^2} - \frac{X-1}{X^2+1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{X-1}{X^2+1}.$$

Sinon, on pourra tout simplement voir qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

Multiplions les deux membres par $X^2(X^2+1)$:

$$X-1 = aX(X^2+1) + b(X^2+1) + (cX+d)X^2.$$

Évaluer X (dans cette identité) en 0, on obtient $b=-1$, d'où

$$\begin{aligned} & X-1 = aX(X^2+1) - (X^2+1) + (cX+d)X^2 \\ \iff \quad & (X-1)+(X^2+1) = aX(X^2+1) + (cX+d)X^2 \\ \iff \quad & X+1 = a(X^2+1) + (cX+d)X. \end{aligned}$$

Évaluons X en 0, on obtient $a=1$. Ensuite,
évaluons X en i, on obtient $i+1=(ci+d)i=-c+di$. Comme c et d sont réels, on obtient $c=-1$ et $d=1$ par identification. On en déduit que

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1}{X} + \frac{-1}{X^2} + \frac{-X+1}{X^2+1}.$$

Pour le deuxième cas, de façon similaire, on trouvera

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Le cas d) : chaque fraction rationnelle a un numérateur duquel degré est supérieur de celui du dénominateur. Par la division euclidienne, on a

$$\begin{aligned} \frac{X^4}{X^2-3X+2} &= X^2+3X+7+\frac{15X-14}{X^2-3X+2}, \\ \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)} &= X+1+\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}. \end{aligned}$$

Donc, pour la première fraction rationnelle, il suffit de procéder comme dans le cas a) et on obtient

$$\frac{X^4}{X^2-3X+2} = X^2+3X+7+\frac{16}{X-2} - \frac{1}{X-1}.$$

Pour la deuxième fraction rationnelle, il suffit de procéder comme la deuxième fraction au cas c) et on obtient

$$\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)} = X+1+\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}.$$

Pour ceux qui sont curieuses ou curieux, voici autres exercices :

Exercice 2 *Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :*

a) $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}, \quad \dfrac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}, \quad \dfrac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)}, \quad \dfrac{X^6-X^2+1}{(X-1)^3}.$

b) $\dfrac{1}{(X^2+1)^2-X^2}, \quad \dfrac{X^3-4X^2+1}{(X-2)^3(X+1)}, \quad \dfrac{1}{X^2(X^2-2X+2)^2}.$

c) $\dfrac{2X^6+3X^5-3X^4-3X^3-3X^2-18X-5}{X^5+X^4-2X^3-X^2-X+2}.$