Résumé de CM12

Fractions rationnelles Ici, on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc.

Par définition, tout élément du corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles peut être écrit sous la forme $\frac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$. L'objectif est de trouver la « forme normale » des fractions rationnelles, qui est une étape importante pour calculer les primitives de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Pour un constant Q, la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ n'est qu'un polynôme, d'où on suppose que Q est un polynôme non constant.

1^{ère} étape. Supposons que $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$. Alors, par la division euclidienne de P par Q, il existe un unique pair $(A, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$. On a

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ+R}{Q} = \frac{AQ}{Q} + \frac{R}{Q} = A + \frac{R}{Q}.$$

Donc, on peut supposer que $\deg(P) < \deg(Q)$ sans perte de généralité.

2^{ème} étape. Il existe polynômes irréductibles $Q_1, Q_2, \cdots Q_r$ non constants deux à deux premiers entre eux et des entiers $m_1, m_2, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $Q = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_r^{m_r}$. Comme les polynômes $Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}$ et $Q_r^{m_r}$ sont premiers entre eux, par identité de Bézout, il existe un pair $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A \cdot (Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) + B \cdot Q_r^{m_r} = 1$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q} &= \frac{P \cdot 1}{(Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) Q_r^{m_r}} = \frac{P(A \cdot (Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) + B \cdot Q_r^{m_r})}{(Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}) Q_r^{m_r}} \\ &= \frac{PA}{Q_r^{m_r}} + \frac{PB}{Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}}}.\end{aligned}$$

Par récurrence, on voit que toute fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ s'écrit comme la somme d'un polynôme et de fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q^m}$ où Q est un polynôme irréductible. D'ici, on va traiter des fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q^m}$ avec un polynôme Q non constant et irréductible et $m \in \mathbb{N}^*$.

3^{ème} étape. Si le $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$[1], par la division euclidienne de P par Q, il existe un unique pair $(A, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg(R) > \deg(Q)$. On a

$$\frac{P}{Q^m} = \frac{AQ+R}{Q^m} = \frac{A}{Q^{m-1}} + \frac{R}{Q^m}.$$

Tant que le degré du quotient A est supérieur ou égale au $\deg(Q)$, on répète la même procédure... On voit que toute fraction rationnelle s'écrit comme la somme de fractions rationnelles de la forme

[1] Jusqu'ici, on suppose que le degré du polynôme P est inférieur au degré du dénominateur Q^m qui est égale à $m \deg(Q)$.

$\dfrac{P}{Q^m}$ où $\deg(P) < \deg(Q)$, le polynôme Q est non constant et irréductible et $m \in \mathbb{N}^*$.

Définition Un élément de $\mathbb{K}[X]$, une fraction rationnelle de la form $\dfrac{P}{Q^m}$ où P est un polynôme, Q est un polynôme non constant et irréductible, $\deg(P) < \deg(Q)$ et $m \in \mathbb{N}^*$ sont appelés **éléments simples**. □

En résumé, on obtient le théorème suivant:

Théorème Toute élément de $\mathbb{K}(X)$ peut s'écrire comme la somme d'éléments simples. □

Exemples Voici les éléments simples qui ne sont pas un polynômes:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On sait qu'un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré 1, d'où un élément simple qui n'est pas un polynôme est une fraction rationnelle de la forme
$$\frac{C}{(X-\alpha)^m} \qquad C \in \mathbb{C}^*,\ \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*.$$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dans ce cas, le degré d'un polynôme irréductible est 1 ou 2. Donc un élément simple qui n'est pas un polynôme est une fraction rationnelle de la forme
$$\frac{C}{(X-\alpha)^m} \qquad C \in \mathbb{R}^*,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*,$$
ou
$$\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^m} \qquad aX+b \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\},\ p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } p^2-4q<0 \text{ et } m \in \mathbb{N}^*.$$
Notons que la condition $p^2 - 4q < 0$ est nécessaire pour que le polynôme $X^2 + pX + q$ soit irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. □

Questions pratiques

Étant donné une fraction rationnelle, disons $\dfrac{P}{Q}$, comment peut-on la décomposer en éléments simples ? Bien évidemment, par la division euclidienne (la **première étape** ci-dessus) si nécessaire, on peut supposer que $\deg(P) < \deg(Q)$ sans perte de généralité.

Revenons à la factorisation
$$Q = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \cdots Q_{r-1}^{m_{r-1}} Q_r^{m_r}.$$
D'après les **deuxième** et **troisième** étapes ci-dessus, les éléments simples apparus dans la décomposition de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ doivent être
$$\frac{P_i}{Q_i^{k_i}}$$
où $1 \leqslant i \leqslant r$ et $0 < k_i \leqslant m_i$ sont des entiers et P_i sont polynômes de degré $< \deg(Q_i)$.