

Résumé de CM3

Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés **éléments**, qui sont clairement définis. Cette (pseudo-)définition est très ambiguë, mais on se content de ça pour le moment. $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ signifie que E est un ensemble dont les éléments sont x_1, x_2, \dots, x_{n-1} et x_n . On dit que x_i ($1 \leq i \leq n$) **appartient** à l'ensemble E , noté $x_i \in E$ ou $E \ni x_i$.

Remarque. Le fameux **paradoxe de Russell**, découvert en 1901, est formulé ainsi: **l'ensemble des ensemble n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?** E. Zermelo a proposé une théorie axiomatique des ensembles en 1908, sur laquelle A. Fraenkel a rajouté deux autres axiomes en 1922. Leur théorie, appelée la théorie **ZF**, avec ou sans l'axiome de choix (**C**), fait une base des mathématiques d'aujourd'hui. \square

Exemples.

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: l'ensemble des entiers naturels,
2. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: l'ensemble des entiers relatifs,
3. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b \neq 0 \right\}$: l'ensemble des fractions rationnelles.
4. \mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels (construction à voir plus tard !)

Le dernier exemple est le **vide**, noté \emptyset , qui ne contient aucun élément. \square

Pour simplifier les écritures, on utilise des **quantificateurs** suivants:

- \forall = pour tout.e.s (ou tous).
- \exists = il.s existe.nt, \nexists = il.s n'existe.nt pas.

Soient A et B deux ensembles. On dit que

1. l'ensemble A est **inclu** dans l'ensemble B $\stackrel{\text{déf.}}{\iff} \forall x \in A, x \in B$.
Dans ce cas, on dit aussi que A est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de B .
On le note par $A \subset B$, $A \subseteq B$, $B \supset A$ ou bien $B \supseteq A$.
2. les ensembles A et B sont **égaux** lorsque $A \subset B$ et $A \supset B$ en même temps.
On le note par $A = B$.

N.B. Pour tout ensemble E , le vide \emptyset est une partie de E . \square

Soit E un ensemble.

1. Soit A une partie de E . Le **complémentaire** de A (dans E), noté A^c , est la partie de E définie par

$$\{x \in E \mid x \notin A\}.$$

2. L'ensemble des parties, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble défini par

$$\{A \mid A \subset E\}.$$

En particulier, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

Opérations sur ensembles

Soient A et B deux ensembles.

1. La **réunion** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par

$$\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

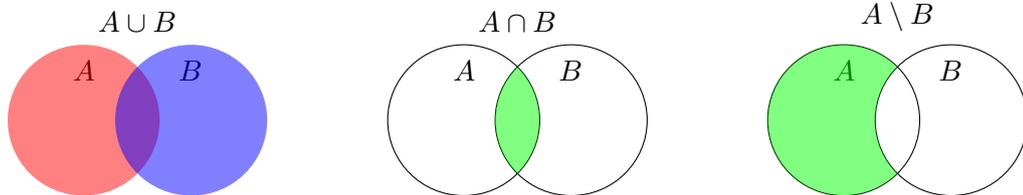
2. L'**intersection** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par

$$\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

3. La **différence** des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, défini par

$$\{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Voici les diagrammes de Venn de la réunion $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$ et la différence $A \setminus B$:



Voici quelques propriétés importantes:

1. Soient A, B, C et D ensembles.
 - i) Si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors on a $A \cup B \subset C$, et
 - ii) si $D \subset A$ et $D \subset B$, alors on a $D \subset A \cap B$.

2. Soient A, B et C ensembles.

- i) (Associativité)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- ii) (Distributivité)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E . Alors, on a

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = (A^c \cup B^c).$$