

Résumé de CM4

Applications

Une **application** est la donnée de deux ensembles E et F et de flèche $f : E \rightarrow F$ qui associe à chaque élément de E un (unique) élément de F . Lorsque un élément x de E est associé à un élément, disons y , de F , on la note $y = f(x)$. On dit que y est **l'image** de x et x est **un antécédent** de y .

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. L'application f est dite **injective** lorsque, pour deux éléments x et y de E , $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$.
2. L'application f est dite **surjective** lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent.
3. L'application f est dite **bijective** lorsque elle est injective et surjective en même temps.

Remarque. Avec les quantificateurs, on pourra écrire ces définitions comme suit:

1. f : injective $\stackrel{\text{déf.}}{\iff} \forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$.
2. f : surjective $\stackrel{\text{déf.}}{\iff} \forall y \in F, \exists x \in E f(x) = y$.
3. f : bijective $\stackrel{\text{déf.}}{\iff} \forall y \in F, \exists! x \in E f(x) = y$.

Soient E, F et G ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux application. Alors, on peut définir l'application de E dans G appelée la **composée** de f et g , notée $g \circ f$, définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in E.$$

Voici quelques propriétés: soient E et F deux ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow F$ deux applications.

1. Lorsque $g \circ f$ est injective, f est injective.

Preuve. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Par définition, on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y).$$

L'application $g \circ f$ étant injective, on en déduit que $x = y$, d'où f est injective.

2. Lorsque $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Preuve. Soit y un élément de G . L'application $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, d'où $f(x) \in F$ est un antécédent de y par g , i.e., g est surjective.

En particulier,

3. lorsque $g \circ f = \text{Id}_E$, où $\text{Id}_E : E \rightarrow E; x \mapsto x$ est l'**application identité**, f est injective et g est surjective. Donc,
4. lorsque $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$, les applications f et g sont bijectives.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Pour une partie $A \subset E$, la partie de F définie par $\{f(x) \mid x \in A\}$ s'appelle l'**image directe** de A , notée $f(A)$.
2. Pour une partie $B \subset F$, la partie de E définie par $\{x \mid f(x) \in B\}$ s'appelle l'**image réciproque**, notée $f^{-1}(B)$.

□

Voici quelques propriétés: soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soient A_1 et A_2 deux parties de E .
 - i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
 - ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
 - iii) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.
2. Soient B_1 et B_2 deux parties de F .
 - i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
 - ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
 - iii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
3. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \quad B \supset f(f^{-1}(B)).$$

Une preuve de ces énoncés est un bon exercice à travailler !

Exemples d'applications bijectives

Voici deux applications bijectives amusantes (à travailler) !

1^{er} exemple: Une bijection f de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad n \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}n & n : \text{pair}, \\ -\frac{n+1}{2} & n : \text{impair}. \end{cases}$$

Avant commencer à montrer sa bijectivité, essayons de voir comment cette fonction se comporte:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$f(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	...

On constate que $f(\mathbb{N}_{pair}) = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{N}_{impair}) = -\mathbb{N}^*$, où

$$\mathbb{N}_{pair} = \{n \in \mathbb{N}, n : \text{pair}\} \quad \mathbb{N}_{impair} = \{n \in \mathbb{N}, n : \text{impair}\}.$$

Montrons la surjectivité de f . Soit $n \in \mathbb{Z}$. (Il suffit de montrer que $\exists m \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(m) = n$.)

1.) Le cas $n \geq 0$. Dans ce cas, il suffit de poser $m = 2n$. En effet, $m = 2n \in \mathbb{N}$ est pair d'où

$$f(m) = f(2n) = \frac{1}{2} \cdot 2n = n.$$

2.) Le cas $n < 0$. Dans ce cas, il suffit de poser $m = -2n - 1$. En effet, $-2n$ est un entier pair strictement positif, donc $m = -2n - 1 \in \mathbb{N}$ et c'est un entier impaire. Donc, par définition, on a

$$f(m) = f(-2n - 1) = -\frac{(-2n - 1) + 1}{2} = -\frac{-2n}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

Dans les deux cas, nous avons trouvé $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(m) = n$, d'où l'application f est injective.

Ensuite, montrons l'injectivité de f . Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $f(m) = f(n)$. (Il suffit de montrer que $m = n$.)

1.) Le cas $f(m) = f(n) \geq 0$. Dans ce cas, m et n sont pairs, donc par définition, on a

$$\frac{1}{2}m = f(m) = f(n) = \frac{1}{2}n \quad \implies \quad m = n.$$

2.) Le cas $f(m) = f(n) < 0$. Dans ce cas, m et n sont pairs, donc par définition, on a

$$-\frac{m+1}{2} = f(m) = f(n) = -\frac{n+1}{2} \quad \implies \quad m = n.$$

Dans les deux cas, nous avons montré que $m = n$, d'où f est injective.

2^{ème} exemple: Une bijection f de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^2 :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2; \quad n \mapsto \left(\frac{1}{2}(m+1)(m+2) - n, n - 1 - \frac{1}{2}m(m+1) \right)$$

avec un entier positif m vérifiant $\frac{1}{2}m(m+1) < n \leq \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. En effet, si on pose

$$g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}; \quad (m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n + 1,$$

on pourra montrer que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{N}^2}$, i.e., l'application g est la réciproque de f .