

Résumé de CM5

Logique

Une **assertion** (ou un prédicat) est une phrase soit vraie, soit fausse mais pas les deux en même temps.

Soient P et Q deux assertions.

1. L'assertion « P **et** Q » est vraie si les assertions P et Q sont vraies en même temps, et l'assertion « P et Q » est fausse sinon.

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

2. L'assertion « P **ou** Q » est vraie si au moins une des deux assertions, et elle est fausse si les deux assertions sont fausses.

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

N.B. C'est un **ou** inclusif.

3. L'assertion « **non** P » est vraie si l'assertions P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	V	F
non P	F	V

4. L'assertion « $P \implies Q$ », qui se lit « P implique Q », est définie par « non (P) ou Q ».

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

N.B. Ceci dit, si P est vraie, alors Q est vraie.

5. L'assertion « $P \iff Q$ », qui se lit « P est équivalent à Q », est définie par « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ ».

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

Remarque. Soient P, Q et R des assertions.

1. (Double négation) $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$.
2. (Commutativité) $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$, $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$.
3. (De Morgan) $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$,
 $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))$.
4. (Distributivité) $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \iff (P \text{ et } Q) \text{ et } (P \text{ et } R)$,
 $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$.
5. (Contraposition) $(P \implies Q) \iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P))$.

N.B. Les opérations **et**, **ou** et **non** en logique formelle et les opérations l'intersection \cap , la réunion \cup et le complémentaire $^c(\cdot)$ donnent même type de structure algébrique, appelée **algèbre de Boole**.
 \square