

Résumé de CM6

Nombres complexes

On a traité brièvement les systèmes de nombres:

$$(\mathbb{N}, +, \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, \times) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \times)$$

suivant le souhait de gagner une liberté de certains de ces opérations $+$ et \times sauf le dernier, où on souhaite avoir une stabilité par rapport à la $\ll \text{lim} \gg$.

L'étape suivante est non-triviale; on veut résoudre équations algébriques, en particulier, une équation de seconde degré $ax^2 + bx + c = 0$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour cela, créons $i = \sqrt{-1}$!

Considérons l'ensemble

$$\mathbb{C} := \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

avec le symbol i qui vérifie $i^2 = -1$. On considère deux opérations; la somme $+$ et le produit \times ou \cdot , définies par

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &:= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &:= (ac - bd) + (ad + bc)i,\end{aligned}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ces opérations vérifient les axiomes suivants:

1. Par rapport à la somme $+$:

- i)₊ (Associativité) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- ii)₊ (Élément neutre) $z + 0 = 0 + z = z$ où $0 := 0 + 0i$.
- iii)₊ (Symétrie) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = z' + z = 0$.
Cet élément z' sera noté $-z$.
- iv)₊ (Commutativité) $z + w = w + z$.

2. Par rapport au produit \times :

- i)_{\times} (Associativité) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
- ii)_{\times} (Élément neutre) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ où $1 := 1 + 0i$.
- iii)_{\times} (Symétrie) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z' = z' \cdot z = 1$.
Cet élément z' sera noté z^{-1} .
- iv)_{\times} (Commutativité) $z \cdot w = w \cdot z$.

3. (Distributivité):

$$(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 \cdot w, \quad w \cdot (z_1 + z_2) = w \cdot z_1 + w \cdot z_2.$$

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Remarque. En 1843, le mathématicien irlandais W. Hamilton eut découvert un nombre, appelé **quaternion**. L'ensemble de tels nombres, noté \mathbb{H} est un $\ll \text{doublage} \gg$ de \mathbb{C} :

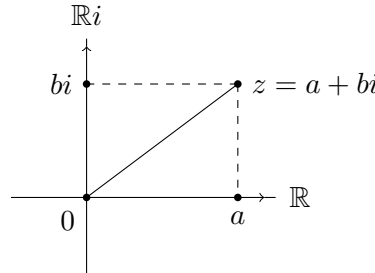
$$\mathbb{H} = \{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

avec les symbols i, j et k vérifiant

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

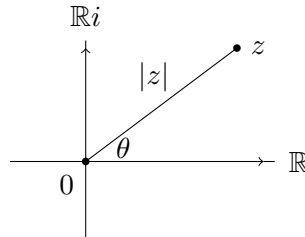
On pourra montrer que c'est un **corps non commutatif**. Un «*doublage*» de \mathbb{H} , appelé **octonion** ou **octave**, fut introduit par J. T. Graves et indépendamment par A. Cayley. Le produit sur l'ensemble de tels nombres \mathbb{O} n'est plus associative ! \square

Via l'application bijective $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2; z = a + bi \mapsto (a, b)$, on peut représenter des nombres complexes sur un plan \mathbb{R}^2 (plan complexe):



Les nombres réels a et b , notés $\text{Re}z$ et $\text{Im}z$, sont appelés la **partie réelle** et la **partie imaginaire**, respectivement. Le nombre complexe $a - bi$ est dit le **conjugué** du nombre complexe z , noté par \bar{z} .

Pour le nombre complexe $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ est dit le **module** du nombre complexe z , noté par $|z|$, et l'angle θ dans le dessin ci-dessous s'appelle un **argument** du nombre complexe z , noté par $\arg(z) = \theta$.



N.B. Plus précisément, tenant en compte de rotations, il faut dire que $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. \square

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Posons $r_k = |z_k|$ et $\theta_k = \arg(z_k)$ ($k = 1, 2$). Alors, par définition, on a $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

i.e., on a

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

En particulier, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Alors, le calcul ci-dessus montre que cette fonction vérifie l'égalité suivante:

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Ça fait penser à une fonction exponentielle ? En effet, le mathématicien suisse L. Euler (1707 - 1783) a découvert la formule suivante, qui porte son nom :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$