Résumé de CM7

Formule d'Euler

Soit $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Alors, le calcul ci-dessus montre que cette fonction vérifie l'égalité suivante:

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha+\beta).$$

Ça fait penser à une fonction exponentielle ? En effet, le mathématicien suisse L. Euler (1707 - 1783) a découvert la formule suivante, qui porte son nom :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Équation algébrique

Rappelons que notre point de départ pour une introduction de nombres complexes était de résoudre une équation algébrique de second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ quelconque. En effet, les racines de cette équation sont $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, où $\Delta := b^2-4ac$ est le **discriminant** de cette équation. Lorsque $\Delta<0$, il nous suffit de mentioner que $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-\Delta}\cdot i$! (Dans $\mathbb{C}$, on peut donc résoudre n'importe quelle équation de second degré avec les **coefficients réels**.)

Alors, que se passe-t-il sur une équation algébrique de second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ avec les **coefficients complexes** ? Dans ce cas, le seul terme qu'il faut traiter en détail est, encore !, le discriminant Δ; cette-fois ci, Δ est un nombre complexe et il faut considérer les **racines carrées** d'un nombre complexe.

Racine carrée: Pour $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, calculons les racines carrées avec deux méthodes différentes.

1$^{\text{ère}}$ méthode. Notons $w=p+qi$ avec $p,q\in\mathbb{R}$. Soit $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ un nombre complexe vérifiant $w=z^2$. Or $z^2=(a+bi)^2=a^2+(bi)^2+2abi=a^2-b^2+2abi$, par identification, on a $a^2-b^2=p$ et $2ab=q$. De plus, comme $|w|=|z^2|=|z|^2=a^2+b^2$, On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a^2-b^2=p, \\ 2ab=q, \\ a^2+b^2=|w|. \end{cases}$$

Par la première et la troisième, on obtient

$$a^2=\frac{|w|+p}{2} \quad \& \quad b^2=\frac{|w|-p}{2}, \qquad \text{i.e.,} \qquad a=\pm\sqrt{\frac{|w|+p}{2}}, \quad \& \quad b=\pm\sqrt{\frac{|w|-p}{2}}.$$

Reste à utiliser la deuxième équation pour déterminer quelle combinaison des signe $\pm$ sont possible; on trouve les deux racines carrées de w ainsi.

2$^{\text{ème}}$ méthode. Travaillons avec la forme exponentielle: $w=Re^{i\theta}$ $(R\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R})$. Cherchons $z=re^{i\varphi}$ $(r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi\in\mathbb{R})$ vérifions $w=z^2$. Or $z^2=r^2e^{2\varphi i}$, on a

$$R=|w|=|z^2|=|z|^2=r^2 \quad \text{i.e.,} \quad r^2=R,$$

d'où $r = R^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}$. Ensuite, $w = z^2$ implique que $Re^{\theta i} = r^2 e^{2\varphi i} = Re^{2\varphi i}$, i.e., $e^{\theta i} = e^{2\varphi i}$. En tenant en compte du fait que la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, i.e., $e^{(\theta+2\pi)i} (= e^{\theta i} \cdot e^{2\pi i}) = e^{\theta i}$ d'après la formule d'Euler, l'égalité $e^{\theta i} = e^{2\varphi i}$ implique

$$2\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{i.e.,} \qquad \varphi = \frac{1}{2}\theta + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition, $e^{\varphi i} = e^{\frac{1}{2}\theta i} \cdot e^{k\pi i}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Puisque $e^{k\pi i} = (e^{\pi})^k = (-1)^k$, on en déduit que les deux racines carrées du nombre complexe $w = Re^{i\theta}$ sont

$$\pm R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\theta i}.$$

Dans tous les cas, les racines carrées d'un nombres complexes sont nombres complexes. Par conséquence, les racines d'une équation algébrique de second degré sont encore nombres complexes.

Que peut-on dire pour une équation algébrique de degré > 2 ?

Traitons un cas simple: étant donné $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = w$ pour un $n > 1$. Ce problème est résoluble généralisant la deuxième méthode expliquée ci-dessus pour $n = 2$:

<u>Racines n-ème:</u> Travaillons avec la forme exponentielle: $w = Re^{i\theta}$ $(R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R})$. Cherchons $z = re^{i\varphi}$ $(r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R})$ vérifions $w = z^n$. Or $z^n = r^n e^{n\varphi i}$, on a

$$R = |w| = |z^n| = |z|^n = r^n \quad \text{i.e.,} \quad r^n = R,$$

d'où $r = R^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{R}$. Ensuite, $w = z^n$ implique que $Re^{\theta i} = r^n e^{n\varphi i} = Re^{n\varphi i}$, i.e., $e^{\theta i} = e^{n\varphi i}$. En tenant en compte du fait que la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, i.e., $e^{(\theta+2\pi)i} (= e^{\theta i} \cdot e^{2\pi i}) = e^{\theta i}$ d'après la formule d'Euler, l'égalité $e^{\theta i} = e^{n\varphi i}$ implique

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{i.e.,} \qquad \varphi = \frac{1}{n}\theta + \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition, $e^{\varphi i} = e^{\frac{1}{n}\theta i} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Étudions les valeurs de $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Tout d'abord, comme $(e^{\frac{2k\pi i}{n}})^n = e^{2k\pi i} = 1$, ces valeurs sont des n-ème racines d'unité ! De plus, puisque

$$e^{\frac{2(k+n)\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i + 2n\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2n\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{2\pi i} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad \text{i.e.,} \qquad e^{\frac{2(k+n)\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

$k \mapsto e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ est n-périodique. Ceci implique l'égalité suivante

$$\{e^{\frac{2k\pi i}{n}}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{e^{\frac{2k\pi i}{n}}\}_{0 \le k < n}.$$

On en conclut que les racines n-ème de $w = Re^{\theta i}$ sont

$$z = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}\theta i} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad 0 \le k < n.$$

Plus généralement, le théorème suivant est connu:

<u>**Théorème** (D'Alembert-Gauss).</u> Toute équation algébrique avec les coefficients complexes ont les racines dans $\mathbb{C}$. (On dit que le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.) $\square$

Ce théorème insiste que on peut toujours trouver les racines d'un polynôme avec les coefficients complexes dans $\mathbb{C}$, mais il ne dit rien comment les trouver.... Voici l'histoire:

1. En 1545, J. Cardano (1501 - 1576) a publié sa formule donnant les solution d'une équation algébrique de degré 3
2. En 1540, L. Ferrari (1522 - 1565) a trouvé une méthode permettant à résoudre une équation algébrique de degré 4.
3. En 1823, N. H. Abel (1802 - 1829) a montré qu'une équation algébrique de degré ≥ 5 n'est pas forcément résoluble, i.e., on ne peut pas forcément obtenir les solutions uniquement par des opérations algébrique, i.e., $\sqrt[n]{\cdot}, +, -, \times, \div$.
4. En 1828, Évariste Galois (1811 - 1832) lui a abordé le problème de détermination si une équation algébrique donnée est résoluble uniquement avec des opérations algébriques.

Pour les curieuse ou curieux,,, voici la résolution des équations de degré 3 et 4:

Équation cubique La méthode de Tartaglia-Cardan, découverte par Scipione del Ferro en 1515.

Ici, on travaille sur une équation algébrique de degré 3 de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Tout d'abord, on pose $x = y - \frac{1}{3}a$. Alors,

$$\begin{aligned}
x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c \\
&= \left(y^3 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)y^2 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^3\right) \\
&\quad + a\left(y^2 + 2\left(-\frac{1}{3}a\right)y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^2\right) + b\left(y + \left(-\frac{1}{3}a\right)\right) + c \\
&= y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3,
\end{aligned}$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2}$$

avec $p, q \in \mathbb{C}$. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $y = u + v$. Par définition, on a

$$y^3 + py + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Donc, si on trouve deux nombres complexes u et v vérifiant

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{et} \qquad 3uv + p = 0, \tag{3}$$

on obtiendra les solution de l'équation algébrique (2). Comme (3) implique que

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad \text{et} \qquad u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3,$$

les deux nombres u^3 et v^3 sont des racines du polynôme

$$(T-u^3)(T-v^3) = T^2 - (u^3+v^3)T + u^3v^3 = T^2 + qT - \frac{1}{27}p^3,$$

d'où

$$u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2} \qquad \text{et} \qquad v^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2},$$

Posons $j = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. On en déduit que les solutions de (3) sont

$$(u,v) = \left(j^k \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}, j^{2k}\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}} \right) \qquad k=0,1,2$$

sachant que $j^3 = 1$. À chaque pair ci-dessus, la somme $u+v$ nous donne une solution de (2), et les solutions de (2) sont ainsi obtenues.

Équation quartique La méthode découverte par Ludovico Ferrari (1522 - 1565).

L'équation en question est une équation algébrique de degré 4 de la forme

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4}$$

avec $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Tout d'abord, on pose $x = y - \frac{1}{4}a$. Alors,

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= \left(y-\frac{1}{4}a\right)^4 + a\left(y-\frac{1}{4}a\right)^3 + b\left(y-\frac{1}{4}a\right)^2 + c\left(y-\frac{1}{4}a\right) + d \\ &= y^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)y^2 + \left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)y + \left(d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4\right), \end{aligned}$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \tag{5}$$

Réécrivons cette équation sous la forme $y^4 = -py^2 - qy - r$, on ajoute à deux côtés $2zy^2 + z^2$ ($z \in \mathbb{C}$):

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z-p)y^2 - qy + (z^2 - r). \tag{6}$$

Choisissons le scalaire z pour que le côté droit soit un facteur carré, i.e., le discriminant du côté droit

$$\Delta := (-q)^2 - 4(2z-p)(z^2-r)$$

soit nul. Notons que le scalaire z vérifie une équation cubique. Avec un tel z, l'équation (6) peut réécrire comme

$$(y^2+z)^2 = (Az+B)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y^2+z)^2 - (Ay+B)^2 = (y^2+Ay+z+B)(y^2-Ay+z-B) = 0,$$

avec deux scalaire A et B. Reste à résoudre ces deux équations de second degré.