

# Résumé de CM7

## Équation algébrique

Rappelons que notre point de départ pour une introduction de nombres complexes était de résoudre une équation algébrique de second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  quelconque. En effet, les racines de cette équation sont  $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ , où  $\Delta := b^2 - 4ac$  est le **discriminant** de cette équation. Lorsque  $\Delta < 0$ , il nous suffit de mentionner que  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\Delta} \cdot i$  ! (Dans  $\mathbb{C}$ , on peut donc résoudre n'importe quelle équation de second degré avec les **coefficients réels**.)

Alors, que se passe-t-il sur une équation algébrique de second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) avec les **coefficients complexes** ? Dans ce cas, le seul terme qu'il faut traiter en détail est, encore !, le discriminant  $\Delta$ ; cette-fois ci,  $\Delta$  est un nombre complexe et il faut considérer les **racines carrées** d'un nombre complexe.

**Racine carrée:** Pour  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , calculons les racines carrées avec deux méthodes différentes.

1<sup>ère</sup> méthode. Notons  $w = p + qi$  avec  $p, q \in \mathbb{R}$ . Soit  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) un nombre complexe vérifiant  $w = z^2$ . Or  $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi$ , par identification, on a  $a^2 - b^2 = p$  et  $2ab = q$ . De plus, comme  $|w| = |z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$ , On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = p, \\ 2ab = q, \\ a^2 + b^2 = |w|. \end{cases}$$

Par la première et la troisième, on obtient

$$a^2 = \frac{|w| + p}{2} \quad \& \quad b^2 = \frac{|w| - p}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad a = \pm \sqrt{\frac{|w| + p}{2}}, \quad \& \quad b = \pm \sqrt{\frac{|w| - p}{2}}.$$

Reste à utiliser la deuxième équation pour déterminer quelle combinaison des signe  $\pm$  sont possible; on trouve les deux racines carrées de  $w$  ainsi.

2<sup>ème</sup> méthode. Travaillons avec la forme exponentielle:  $w = Re^{i\theta}$  ( $R \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ). Cherchons  $z = re^{i\varphi}$  ( $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ ) vérifions  $w = z^2$ . Or  $z^2 = r^2 e^{2\varphi i}$ , on a

$$R = |w| = |z^2| = |z|^2 = r^2 \quad \text{i.e.,} \quad r^2 = R,$$

d'où  $r = R^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}$ . Ensuite,  $w = z^2$  implique que  $Re^{i\theta} = r^2 e^{2\varphi i} = Re^{2\varphi i}$ , i.e.,  $e^{i\theta} = e^{2\varphi i}$ . En tenant en compte du fait que la fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  est  $2\pi$ -périodique, i.e.,  $e^{(\theta+2\pi)i} (= e^{i\theta} \cdot e^{2\pi i}) = e^{i\theta}$  d'après la formule d'Euler, l'égalité  $e^{i\theta} = e^{2\varphi i}$  implique

$$2\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{i.e.,} \quad \varphi = \frac{1}{2}\theta + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition,  $e^{\varphi i} = e^{\frac{1}{2}\theta i} \cdot e^{k\pi i}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Puisque  $e^{k\pi i} = (e^\pi)^k = (-1)^k$ , on en déduit que les deux racines carrées du nombre complexe  $w = Re^{i\theta}$  sont

$$\pm R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\theta i}.$$

Dans tous les cas, les racines carrées d'un nombre complexe sont des nombres complexes. Par conséquent, les racines d'une équation algébrique de second degré sont encore des nombres complexes.

Que peut-on dire pour une équation algébrique de degré  $> 2$  ?

Traisons un cas simple: étant donné  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , trouver tous les  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $z^n = w$  pour un  $n > 1$ . Ce problème est résoluble généralisant la deuxième méthode expliquée ci-dessus pour  $n = 2$ :

**Racines  $n$ -ème:** Travaillons avec la forme exponentielle:  $w = Re^{i\theta}$  ( $R \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ). Cherchons  $z = re^{i\varphi}$  ( $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ ) vérifions  $w = z^n$ . Or  $z^n = r^n e^{n\varphi i}$ , on a

$$R = |w| = |z^n| = |z|^n = r^n \quad \text{i.e.,} \quad r^n = R,$$

d'où  $r = R^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{R}$ . Ensuite,  $w = z^n$  implique que  $Re^{i\theta} = r^n e^{n\varphi i} = Re^{n\varphi i}$ , i.e.,  $e^{i\theta} = e^{n\varphi i}$ . En tenant en compte du fait que la fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  est  $2\pi$ -périodique, i.e.,  $e^{(\theta+2\pi)i} (= e^{i\theta} \cdot e^{2\pi i}) = e^{i\theta}$  d'après la formule d'Euler, l'égalité  $e^{i\theta} = e^{n\varphi i}$  implique

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{i.e.,} \quad \varphi = \frac{1}{n}\theta + \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Que signifie-t-il ? Par définition,  $e^{\varphi i} = e^{\frac{1}{n}\theta i} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Étudions les valeurs de  $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Tout d'abord, comme  $(e^{\frac{2k\pi i}{n}})^n = e^{2k\pi i} = 1$ , ces valeurs sont des  $n$ -ème racines d'unité ! De plus, puisque

$$e^{\frac{2(k+n)\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i + 2n\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2n\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{2\pi i} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad \text{i.e.,} \quad e^{\frac{2(k+n)\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

$k \mapsto e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  est  $n$ -périodique. Ceci implique l'égalité suivante

$$\left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \right\}_{0 \leq k < n}.$$

On en conclut que les racines  $n$ -ème de  $w = Re^{i\theta}$  sont

$$z = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}\theta i} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad 0 \leq k < n.$$

Plus généralement, le théorème suivant est connu:

**Théorème (D'Alembert-Gauss).** Toute équation algébrique avec les coefficients complexes ont les racines dans  $\mathbb{C}$ . ( On dit que le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est **algébriquement clos**. )  $\square$

Une preuve simple de ce théorème nécessite l'Analyse complexe....

Ce théorème insiste que on peut toujours trouver les racines d'un polynôme avec les coefficients complexes dans  $\mathbb{C}$ , mais il ne dit rien comment les trouver.... Voici l'histoire:

1. En 1545, J. Cardano (1501 - 1576) a publié sa formule donnant les solutions d'une équation algébrique de degré 3
2. En 1540, L. Ferrari (1522 - 1565) a trouvé une méthode permettant de résoudre une équation algébrique de degré 4.

3. En 1823, N. H. Abel (1802 - 1829) a montré qu'une équation algébrique de degré  $\geq 5$  n'est pas forcément résoluble, i.e., on ne peut pas forcément obtenir les solutions uniquement par des opérations algébrique, i.e.,  $\sqrt[n]{\cdot}$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ .
4. En 1828, Évariste Galois (1811 - 1832) lui a abordé le problème de détermination si une équation algébrique donnée est résoluble uniquement avec des opérations algébriques.

Pour les curieuse ou curieux,,, voici la résolution des équations de degré 3 et 4:

**Équation cubique** La méthode de Tartaglia-Cardan, découverte par Scipione del Ferro en 1515.

Ici, on travaille sur une équation algébrique de degré 3 de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Tout d'abord, on pose  $x = y - \frac{1}{3}a$ . Alors,

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c \\ &= \left(y^3 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)y^2 + 3\left(-\frac{1}{3}a\right)^2y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^3\right) \\ &\quad + a\left(y^2 + 2\left(-\frac{1}{3}a\right)y + \left(-\frac{1}{3}a\right)^2\right) + b\left(y + \left(-\frac{1}{3}a\right)\right) + c \\ &= y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3, \end{aligned}$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^3 + py + q = 0 \quad (2)$$

avec  $p, q \in \mathbb{C}$ . Soient  $u, v \in \mathbb{C}$  tels que  $y = u + v$ . Par définition, on a

$$y^3 + py + q = (u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Donc, si on trouve deux nombres complexes  $u$  et  $v$  vérifiant

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad \text{et} \quad 3uv + p = 0, \quad (3)$$

on obtiendra les solution de l'équation algébrique (2). Comme (3) implique que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3, \end{cases}$$

les deux nombres  $u^3$  et  $v^3$  sont des racines du polynôme

$$(T - u^3)(T - v^3) = T^2 - (u^3 + v^3)T + u^3v^3 = T^2 + qT - \frac{1}{27}p^3,$$

d'où

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2},$$

Posons  $j = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ . On en déduit que les solutions de (3) sont

$$(u, v) = \left( \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}, \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} \right), \left( j \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}, j^2 \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} \right), \\ \left( j^2 \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}, j \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} \right),$$

sachant que  $j^3 = 1$ . À chaque pair ci-dessus, la somme  $u + v$  nous donne une solution de (2), et les solutions de (2) sont ainsi obtenues.

### Équation quartique

La méthode découverte par Ludovico Ferrari (1522 - 1565).

L'équation en question est une équation algébrique de degré 4 de la forme

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (4)$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Tout d'abord, on pose  $x = y - \frac{1}{4}a$ . Alors,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(y - \frac{1}{4}a\right)^4 + a\left(y - \frac{1}{4}a\right)^3 + b\left(y - \frac{1}{4}a\right)^2 + c\left(y - \frac{1}{4}a\right) + d \\ = y^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)y^2 + \left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)y + \left(d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4\right),$$

d'où il nous suffit de travailler sur une équation de la forme

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \quad (5)$$

Récrivons cette équation sous la forme  $y^4 = -py^2 - qy - r$ , on ajoute à deux côtés  $2zy^2 + z^2$  ( $z \in \mathbb{C}$ ):

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z - p)y^2 - qy + (z^2 - r). \quad (6)$$

Choisissons le scalaire  $z$  pour que le côté droit soit un facteur carré, i.e., le discriminant du côté droit

$$\Delta := (-q)^2 - 4(2z - p)(z^2 - r)$$

soit nul. Notons que le scalaire  $z$  vérifie une équation cubique. Avec un tel  $z$ , l'équation (6) peut réécrire comme

$$(y^2 + z)^2 = (Az + B)^2 \iff (y^2 + z)^2 - (Ay + B)^2 = (y^2 + Ay + z + B)(y^2 - Ay + z - B) = 0,$$

avec deux scalaire  $A$  et  $B$ . Reste à résoudre ces deux équations de second degré.