

**Exercices**

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

**Exercice 1** Montrer l'identité suivante par récurrence.

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} = \frac{z}{z-1} \left( \frac{z^n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k(k+1)} \right) \quad \forall n > 1.$$

**Exercice 2**

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  de l'équation  $720x + 252y = 108$ .
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne  $20x + 7y = 3$ .
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & (\text{mod } 20) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

**Exercice 3** Soit  $P$  le polynôme réel :  $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$ . On suppose que 2 est une racine double de  $P$ .

1. Déterminer  $a$  et  $b$ .
2. Montrer que  $-1 + i$  est une racine de  $P$ .
3. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 4** Soit  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z + \frac{1}{z}$ .

1.  $f$  est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier vos réponses.
2. Trouver les  $w \in \mathbb{C}$  tels que le nombre d'éléments de  $f^{-1}(w)$  soit 1.

**Exercice 5** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $((\sin \theta)X + \cos \theta)^n$  par  $X^2 + 1$ .