Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2023–2024**

L1 UE : Algèbre 1 (MATHS)

Exercices

CORRECTION

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Montrer l'identité suivante par recurrence.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k(k+1)}\right) \qquad \forall\, n > 1.$$

Correction. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissions la propriétés $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k(k+1)}\right)$.

Initialisation : Pour $n = 2$, on a

$$\frac{z}{z-1}\left(\frac{z^2}{2} - 1 + \frac{z}{1\cdot 2}\right) = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{2}(z+2)(z-1) = \frac{1}{2}(z^2+2z) = \sum_{k=1}^{2}\frac{z^k}{k},$$

donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie. En rang $n+1$,

$$\frac{z}{z-1}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k(k+1)}\right) = \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{z^k}{k(k+1)}\right) + \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^n}{n} + \frac{z^n}{n(n+1)}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k} + \frac{z}{z-1}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^n}{n} + \frac{z^n}{n} - \frac{z^n}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k} + \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z^n(z-1)}{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k} + \frac{z^{n+1}}{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{z^k}{k},$$

et dont $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 2

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.

   Correction. Par la division euclidienne,

$$\begin{aligned} 720 &= 2\cdot 252 + 216 \\ 252 &= 1\cdot 216 + 36 \\ 216 &= 6\cdot 36, \end{aligned}$$

   d'où $\mathrm{PGCD}(720, 252) = 36$.

2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.

   Correction. Par les calculs précédents,

$$\begin{aligned} 36 &= 252 - 1\cdot 216 = 252 - 1\cdot(720 - 2\cdot 252) \\ &= 720\cdot(-1) + 252\cdot 3. \end{aligned}$$

Comme $108 = 36 \cdot 3$, en multipliant l'identité ci-dessus par 3, on obtient $720 \cdot (-3) + 252 \cdot 9 = 108$ d'où $(x_0, y_0) = (-3, 9)$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $720x + 252y = 108$.

3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.

   Correction. Le pair (x_0, y_0) obtenu ci-dessus est une solution particulière de l'équation diophantienne $720x + 252y = 108$ qui est équivalent à $20x + 7y = 3$ (en multipliant $\frac{1}{36}$), d'où $20x + 7y = 20x_0 + 7y_0 \iff 20(x - x_0) = -7(y - y_0)$. Comme $\mathrm{PGCD}(7, 20) = 1$, le lemme de Gauss implique que $7 | x - x_0$, d'où il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 7k$, i.e., $x = x_0 + 7k$. Ceci implique que $20 \cdot 7k = -7(y - y_0)$ d'où $y = y_0 - 20k$. Donc, l'ensemble des solutions (x, y) de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$ est $\{\, (-3 + 7k, 9 - 20k) \,|\, k \in \mathbb{Z} \,\}$.

4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & \pmod{20} \\ n \equiv 6 & \pmod{7} \end{cases}$$

   Correction. La première équation implique qu'il existe $x' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 20x' + 9$ et la deuxième équation implique qu'il existe $y' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 7y' + 6$. Donc, on a $20x' + 9 = 7y' + 6 \iff 20(-x') + 7y' = 3$. D'après la Question 2., $(-x', y') = (-3, 9)$, i.e., $(x', y') = (3, 9)$ est une solution particulière de ce système d'équations, i.e., $n_0 = 20 \cdot 3 + 9 = 7 \cdot 9 + 6 = 69$ est une solution particulière de ce système d'équations. D'après le théorème de reste chinois, l'ensemble des solutions n de ce système d'équations est $\{\, 69 + 140k \,|\, k \in \mathbb{Z} \,\}$ car $\mathrm{PPCM}(20, 7) = 140$.

Exercice 3 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 - aX^4 - 6X^3 + bX^2 + 16X + 8$. On suppose que 2 est une racine double de P.

1. Déterminer a et b.

   Correction. Comme 2 est une racine double de P, on a $P(2) = 0$ et $P'(2) = 0$, qui donne le système d'équations sur a et b. On en déduit que $a = 5$ et $b = 6$.

2. Montrer que $-1 + i$ est une racine de P.

   Correction. D'après la question précedente, il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = X^6 - 5X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 16X + 8 = (X - 2)^2 Q(X)$. D'après la division euclidienne de $P(X)$ par $X^2 - 4X + 4$, on obtient $Q(X) = X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 2$. Comme

$$\begin{aligned} Q(-1+i) =& (-1+i)^4 + 4(-1+i)^3 + 7(-1+i)^2 + 6(-1+i) + 2 \\ =& (-4) + 4(2+2i) + 7(-2i) + 6(-1+i) + 2 = (-4+8-6+2) + (8-14+6)i = 0, \end{aligned}$$

   d'où $P(-1+i) = (-3+i)^2 Q(-1+i) = 0$, i.e., $-1 + i$ est une racine du polynôme P.

3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

   Correction. Comme le polynôme Q est un polynôme à coefficients réels, on déduit de la question précédente que $-1 - i$ est aussi une racine de Q, d'où le polynôme Q est divisible par $(X - (-1 + i))(X - (-1 - i)) = X^2 + 2X + 2$. Par la division euclidienne, on obtient

$$Q(X) = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + 1) = (X+1)^2(X^2 + 2X + 2),$$

   on en déduit que $P(X) = (X - 2)^2 Q(X) = (X - 2)^2 (X + 1)^2 (X^2 + 2X + 2)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier vos réponses.

   Correction. Injectivité. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 + \dfrac{1}{z_1} = z_2 + \dfrac{1}{z_2}$. Multipliant par $z_1 z_2$, on obtient

   $$z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 - z_1 + z_2 = (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - 1) = 0.$$

   Ceci implique que $z_1 = z_2$ ou $z_1 z_2 = 1$, d'où l'application f n'est pas injective.

   Surjectivité. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$, i.e., $z + \dfrac{1}{z} = w$. Multipliant par z, on obtient $z^1 + 1 = wz$, i.e., $z^2 - wz + 1 = 0$. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, cette équation admet une racine complexe. De plus, cette racine ne peut être 0, d'où l'application f est surjective.

   Bijectivité. Comme l'application f n'est pas injective, f n'est pas bijective.

2. Trouver les $w \in \mathbb{C}$ tels que le nombre d'éléments de $f^{-1}(w)$ soit 1.

   Correction. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) = w$. Alors, z vérifie l'équation $z^2 - wz + 1 = 0$ par la question précédente. Le discriminant de cette équation étant $w^2 - 4 = (w+2)(w-2)$, les $w \in \mathbb{C}$ tel que le nombre d'éléments de $f^{-1}(w)$ est 1 sont ± 2.

Exercice 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $((\sin\theta)X + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Correction. D'après la division euclidienne du polynôme $((\sin\theta)X + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$((\sin\theta)X + \cos\theta)^n = (X^2 + 1)Q(X) + aX + b.$$

Évaluons X dans cette égalité en i, on obtient $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = ai + b$ car $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ d'après la formule d'Euler. Donc, par identification, on en déduit que $a = \sin(n\theta)$ et $b = \cos(n\theta)$, d'où le reste de la division euclidienne de $((\sin\theta)X + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$ est

$$\sin(n\theta)X + \cos(n\theta).$$