Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2023–2024**

L1 UE : Algèbre 1 (INFO)

Devoir Surveillé 1 du 19/10/2023

Durée : 1 heure

CORRECTION

Exercice 1 **Somme finie (4 points)**

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}(2k+i) = \frac{n(n+1)(3n+2)}{2}.$$

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}(2k+i) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}i\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}k+i\sum_{k=1}^{n}1\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(2\times\frac{n(n+1)}{2}+in\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}n(n+1)+\sum_{i=0}^{n}in = n(n+1)\sum_{i=0}^{n}1+n\sum_{i=0}^{n}i = n(n+1)(n+1)+n\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1)\left(n+1+\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n+1)(3n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 **Application (3+2=5 points)**

On considère l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ par $f(m,n) = (2n-m, 2n+m)$.

1. Montrer que f est injective.

   Correction. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, alors

   $$f(m,n) = f(p,q) \Rightarrow (2n-m, 2n+m) = (2p-q, 2p+q) \Rightarrow \begin{cases} 2n-m = 2p-q \\ 2n+m = 2p+q \end{cases}$$

   On obtient donc, en sommant les deux égalités, $4n = 4p$, ce qui implique que $n = p$, puis en remplaçant dans la première égalité, on obtient $m = q$, et on a donc montré que $(m,n) = (p,q)$, donc f est injective.

2. L'application f est-elle bijective ? Justifier.

   Correction. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, alors on a, pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$,

   $$\begin{aligned}(a,b) = f(m,n) &\iff \begin{cases} 2n-m = a \\ 2n+m = b \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 4n = a+b \\ 2n+m = b \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} n = \frac{a+b}{4} \\ m = b-2n = b-\frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

   Si maintenant on choisit $(a,b) = (0,1)$, alors on trouve $n = \frac{1}{4}$ et $m = \frac{1}{2}$ comme antécédents par f, qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}$. Ainsi, f n'est pas surjective, donc n'est pas bijective.

Exercice 3 **Logique et ensembles (2+1+1+3=7 points)**

Soient A, B et C trois ensembles. On considère la proposition P suivante :

$$P: \quad (A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \Longrightarrow B \subset C.$$

1. Ecrire la table de vérité de (Q et R) $\Longrightarrow S$, où Q, R et S sont des assertions.

   Correction. On commence par remarquer que (Q et R) $\Longrightarrow S$ est équivalent à non(Q et R) ou S, qui est équivalent à non(Q) ou non(R) ou S. La table de vérité de cette proposition est donc uniquement constituée de V sauf quand Q est Vraie, R est Vraie et S est fausse, où dans ce cas la proposition est fausse.

Q	R	S	non(Q)	non(R)	non(Q) ou non(R) ou S
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V

2. Déterminer non(P).

   Correction. On remarque que P : (Q et R) $\Longrightarrow S$ avec $Q : A \cap B \subset A \cap C$, $R : A \cup B \subset A \cup C$ et $R : B \subset C$. Ainsi, comme non((Q et R) $\Longrightarrow S$) est équivalent à Q et R et non(S), on conclut que

$$\text{non}(P): \quad A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C \text{ et } B \not\subset C.$$

3. Soient $A = [0, 4[$, $B = \mathbb{R} \backslash]2, +\infty[$ et $C =]-\infty, 3[$.

   Montrer que ces ensembles vérifient ($A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$) ainsi que $B \subset C$.

   Correction. On a $B =]-\infty, 2]$, et ainsi :

$$A \cap B = [0, 2] \subset A \cap C = [0, 3[\quad \text{et} \quad A \cup B =]-\infty, 4[\subset A \cup C =]-\infty, 4[,$$

   et $B =]-\infty, 2] \subset C =]-\infty, 3[$.

4. Montrer que, pour tous ensembles A, B et C, la proposition P est vraie.

   Correction. Supposons que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$ et montrons que $B \subset C$.

   Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B \subset A \cup C$, donc $x \in A \cup C$. On a donc deux cas :

   - Si $x \in A$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in A \cap C$ et ainsi $x \in C$.
   - Si $x \in C$, alors on a démontré le résultat.

   Dans tous les cas, on a montré que $x \in C$, donc $B \subset C$ et la proposition P est donc vraie.

Exercice 4 **Images directes et réciproques (1+2+3=6 points)**

Soit $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$.

1. Déterminer (sans justification) $f([-2, 0])$ et $f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[\right)$.

   Correction. On a $f([-2, 0]) = [1, 5]$ et $f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[\right) = \left[1, \frac{13}{9}\right[$.

2. Déterminer (sans justification) $f^{-1}([-2, 3])$ et $f^{-1}(\{4\})$.

   Correction. On a $f^{-1}([-2, 3]) = [-\sqrt{2}, 1]$ et $f^{-1}(\{4\}) = -\sqrt{3}$.

3. Montrer que $g : [-2, 0] \to [1, 5]$, $x \mapsto x^2 + 1$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
Correction. Soit $y \in [1, 5]$, alors on a

$$y = g(x) \iff y = x^2 + 1 \iff x^2 = y - 1 \iff x = -\sqrt{y-1} \text{ ou } x = \sqrt{y-1}.$$

Maintenant, on remarque que $1 \leqslant y \leqslant 5$ implique que $-\sqrt{y-1} \in [-2, 0]$ et $\sqrt{y-1} \in [0, 2]$, donc on trouve comme unique antécédent de y le réel $x = -\sqrt{y-1} \in [-2, 0]$, ce qui prouve que g est bijective de bijection réciproque $g^{-1} : [1, 5] \to [-2, 0]$, $y \mapsto -\sqrt{y-1}$.

<u>Exercice 5</u> BONUS : Calculs simples dans $\mathbb{C}$ (3 points)

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 - i)(3 + 5i), \quad z_2 = \frac{1+i}{i}, \quad \text{et} \quad z_3 = \overline{i(2-i)}.$$

Correction. On a

$$\begin{aligned}
z_1 &= (2 - i)(3 + 5i) = 6 + 10i - 3i + 5 = 11 + 7i \\
z_2 &= \frac{1+i}{i} = \frac{i(1+i)}{-1} = -i(1+i) = 1 - i \\
z_3 &= \overline{i(2-i)} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i.
\end{aligned}$$