Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2023–2024**

L1 — UE : Algèbre 1(MATH)

Devoir Surveillé 1 - 23 Octobre 2023

Durée : 1h

CORRECTION

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 **Somme (6 pts).** Pour tout entier $n > 0$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer par récurrence que $S_n = T_n$ pour tour $n > 0$.

Correction. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons la propriété $P(n)$: $S_n = T_n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $S_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = T_1$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}
S_{n+1} =& S_n + \sum_{k=2n+1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
=& T_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
=& \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \right) = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = T_{n+1}
\end{aligned}$$

et donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 2 **Injectivité et surjectivité (6 pts).** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier votre réponse.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie par $f(n) = (n^3, n^2)$.

Correction. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $f(m) = f(n)$. Alors, $m^3 = n^3$ et $m^2 = n^2$. $m^2 = n^2$ implique que $n = \pm m$ et comme $n^3 = m^3$, on a $m = n$, i.e., f est injective. Par contre, f ne peut être surjective, car par exemple, $(1, 0)$ n'a pas un antécédent.

(b) $g : \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi\right\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \tan x$.

Correction. g est surjective car $g|_{]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[}$ et $g|_{]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]}$ sont croissantes et $\mathrm{Im}(g|_{[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[}) = [1, +\infty[$ et $\mathrm{Im}(g|_{]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}]}) =]-\infty, 1]$, cependant elle n'est pas injective car $g(\frac{1}{4}\pi) = g(\frac{5}{4}\pi) = 1$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$.

Correction. Comme $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, h n'est ni injective ni surjecvtive car $h(0, 0) = (0, 0) = h(1, -1)$ et $(0, 1)$ n'a pas un antécédent car $x+y = 0$ implique $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$.

Exercice 3 **Logique et ensemble (6pts) .**

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$
\begin{aligned}
(P): &\quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y \\
(Q): &\quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,.
\end{aligned}
$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).

   Correction.

$$
\begin{aligned}
\text{non}(P): &\quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) \neq y \\
\text{non}(Q): &\quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) \neq y\,.
\end{aligned}
$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. L'assertion (P) est-elle vraie ? L'assertion (Q) est-elle vraie ? Justifier.

   Correction. L'assertion (P) n'est pas vraie car f n'est pas constante. Par contre, comme f est surjective, l'assertion (Q) est vraie.

3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$. Justifier votre réponse.

   Correction. Ni l'assertion (P) ni l'assertion (Q) n'est vraie, car f n'est pas constante et f n'est pas surjective.

Exercice 4 **Images direct et réciproques (4pts).** Toutes les réponses doivent être justifiées.

(a) Déterminer $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$, avec $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto \cos(x)$.

Indication. $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

(c) Montrer que $g : [0, 2] \to [1, 5]; x \mapsto (x-2)^2 + 1$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Indication. $g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$.

Exercice 5 **BONUS Calculs simples dans $\mathbb{C}$ (3 pts).**

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$
z_1 = (2+i)(5-3i), \qquad z_2 = \frac{1+2i}{4+3i}, \qquad z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2023}.
$$

Correction. On a

$$
\begin{aligned}
z_1 =& (2+i)(5-3i) = 10 - 6i + 5i + 3 = 13 - i \\
z_2 =& \frac{1+2i}{4+3i} = \frac{(1+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4-3i+8i+6}{16+9} = \frac{10+5i}{25} = \frac{2+i}{5} \\
z_3 =& \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2023} = e^{\frac{2023}{6}\pi i} = e^{\frac{6\cdot 337+1}{6}\pi i} = e^{337\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{6}i} = -e^{\frac{\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}.
\end{aligned}
$$