Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2023–2024**

L1 UE : Algèbre 1 (INFO)

Exercice

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Nombres complexes

Soit $w \in \mathbb{C}$. On considère l'équation (E_w) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E_w) : z^5 - wz^3 - iz^2 + iw = 0$$

1. Déterminer les racines cubiques de i.

   Correction Les racines cubiques de i sont des nombres complexes z vérifiant $z^3 = i$.
   Posons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $z^3 = r^3 e^{3\theta i} = 1$ implique que $r^3 = 1$ et $e^{3\theta i} = e^{\frac{\pi i}{2}}$, d'où $r = 1$ et $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k = 0, 1, 2$, i.e., $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ avec $k = 0, 1, 2$, d'où les racines cubiques de i sont $z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_1 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$ et $z_2 = e^{\frac{9\pi}{6}i}$.

2. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 - 6i$.

   Correction Soit $z = a + bi$ une racine carrée de $-8 - 6i$. Comme $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, on a $a^2 - b^2 = -8, 2ab = -6$. Le module de z^2 étant $(-8)^2 + 6^2 = 10^2$, on en déduit que $|z|^2 = a^2 + b^2 = 10$. Ceux-ci impliquent que $a^2 = 1, b^2 = 9$ et $ab = -3$, d'où $(a, b) = (1, -3), (-1, 3)$, i.e., les racines carrées de $-8 - 6i$ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$.

3. Soit $w = 0$, résoudre l'équation (E_w).

   Correction L'équation (E_0) est $z^5 - iz^2 = z^2(z^3 - i) = 0$, i.e., $z^2 = 0$ ou $z^3 - i = 0$.
   Les solutions de $z^2 = 0$ sont $z = 0$ et que les solutions de $z^3 - i = 0$ sont z_0, z_1 et z_2 d'après 1. On en déduit que les solution de (E_0) sont $0, z_0, z_1$ et z_2.

4. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 - wz^3 - iz^2 + iw = (z^3 - a)(z^2 - b)$.

   Correction Comme $z^5 - wz^3 - iz^2 + iw = z^3(z^2 - w) - i(z^2 - w) = (z^3 - i)(z^2 - w)$, on en déduit que $(a, b) = (i, w)$.

5. En déduire les solutions de l'équation (E_w) pour $w = -4$, puis pour $w = -8 - 6i$.

   Correction D'après la question précédente, l'équation (E_{-4}) est $(z^3 - i)(z^2 + 4) = 0$, d'où les solutions sont z_0, z_1, z_2 et $\pm 2i$.
   Pour l'équation (E_{-8-6i}) étant $(z^3 - i)(z^2 - (-8 - 6i)) = 0$, les solutions sont z_0, z_1, z_2 et $\pm(1 - 3i)$.

Exercice 2 Équation diophantienne et Théorème des restes chinois

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.

   Correction Par les divisions euclidiennes successives $720 = 2 \cdot 252 + 216$, $252 = 1 \cdot 216 + 36$ et $216 = 6 \cdot 36$, on a $\mathrm{pgcd}(720, 252) = 36$.

2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.

   Correction Remontant les divisions euclidiennes ci-dessus :
   $36 = 252 - 1 \cdot 216 = 252 - 1 \cdot (720 - 2 \cdot 252) = (-1) \cdot 720 + 3 \cdot 252$.
   Comme $108 = 3 \cdot 36$, on voit que $(x_0, y_0) = 3(-1, 3) = (-3, 9)$ est une solution particulière de l'équation $720x + 252y = 108$.

3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.

Correction Comme $720 = 36 \cdot 20$ et $252 = 36 \cdot 7$, on voit que l'équation $720x + 252y = 108$ est équivalent à l'équation $20x + 7y = 3$.
En particulier, (x_0, y_0) de la question précédente est une solution particulière de l'équation $20x + 7y = 3$, i.e., il vérifie $20x_0 + 7y_0 = 3$, d'où $20(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0$, i.e., $20(x - x_0) = -7(y - y_0)$. Le deuxième membre étant un multiple de 7, $7|20(x - x_0)$. D'après le lemme de Gauss, il existe $7|(x - x_0)$. Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 7k$, i.e., $x = x_0 + 7k$. Ceci implique que $7(y - y_0) = -20(x - x_0) = -140k$ d'où $y = y_0 - 20k$.
Donc, les solutions sont $(x, y) = (x_0, y_0) + k(7, -20)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & \pmod{20} \\ n \equiv 6 & \pmod{7} \end{cases}$$

Correction L'équation $n \equiv 9[20]$ implique qu'il existe $x' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 20x' + 9$ et l'équation $n \equiv 6[7]$ implique qu'il existe $y' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 7y' + 6$. On en déduit que $(n =)20x' + 9 = 7y' + 6$, i.e., $20(-x') + 7y' = 3$. D'après la question précédente, on en déduit que $(-x', y') = (x_0, y_0) + k(7, -20) = (-3, 9) + k(7, -20)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
d'où $n = 7y' + 6 = 7(9 - 20k) + 6 = 69 - 140k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Exercice 3</u> Nombres premiers

1. Vérifier que, pour tout entier $0 \leqslant n \leqslant 40$, l'entier $n^2 - n + 41$ est un nombre premier et que pour $n = 41$ et 42, ils ne le sont pas.

Correction Par calcul direct. Voici le tableau $(0 < n \leqslant 40)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	151	173	197	223	251	281	313	347	383	421
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	461	503	547	593	641	691	743	797	853	911
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$f(n)$	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

On peut vérifier que les $f(n)$ dans ce tableau sont tous premiers ! Le critère suivant est à utiliser :

Si un entier $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas divisible par les nombres premiers p entre 1 et $\sqrt{n}$,
n est un nombre premier.

Cet énoncé est évident car si n a un diviseur d vérifiant $\sqrt{n} \leqslant d < n$, alors, l'entier $\frac{n}{d}$ est un diviseur de n vérifiant $1 < \frac{n}{d} \leqslant \sqrt{n}$.
Reste à savoir que les nombres premiers entre 1 et 40 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$.
Bien évidemment, $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2 (= 1681)$ et $f(42) = 42^2 - 42 + 41 = 42(42 - 1) + 41 = 41(42 + 1) = 41 \cdot 43 (= 1763)$ ne sont pas premiers... BON COURAGE !!!

2. Existe-t-il un entier K tel que $n^2 - n + K$ est un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf $n = K, K + 1$? Justifier votre réponse.

Correction On constante que, par exemple, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$f(mK) = (mK)^2 - mK + K = K(mK^2 - m + 1)$$

ne peut être un nombre premier. Donc, un tel entier K n'existe pas.

<u>Exercice 4</u> Congruence Calculer $16^{2023} \mod 11$ et $16^{2023} \mod 13$.

Correction Comme $16 \equiv 5[11]$, on a $16^{2023} \equiv 5^{2023}[11]$. Étudions les puissances de 5. Par calcul direct,

$$5^2 = 25 \equiv 3[11], \quad 5^3 \equiv 15 \equiv 4[11], \quad 5^4 \equiv 20 \equiv 9[11], \quad 5^5 \equiv 45 \equiv 1[11].$$

Comme $2023 = 404 \cdot 5 + 3$, on en déduit que

$$5^{2023} = (5^5)^{404} \cdot 5^3 (\equiv 1^{404} \cdot 5^3) \equiv 5^3 \equiv 4[11].$$

De même, $16 \equiv 3[13]$ implique que $16^{2023} \equiv 3^{2023}[13]$ et

$$3^2 = 9, \quad 3^3 = 27 \equiv 1[13].$$

(On peut aussi calculer comme $3^2 = 9 \equiv -4[13]$ et $3^3 \equiv -12 \equiv -12 + 13 \equiv 1[13]$.)

Comme $2023 = 674 \cdot 3 + 1$, on en déduit que

$$3^{2023} = (3^3)^{674} \cdot 3^1 (\equiv 1^{674} \cdot 3^1) \equiv 3^1 \equiv 3[13].$$

On obtient

$$16^{2023} \equiv 4[11], \qquad 16^{2023} \equiv 3[13].$$