Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2023–2024**
L1 | UE : Algèbre 1 (INFO)

Devoir Surveillé 2 du 07/12/2022

CORRECTION

Exercice 1 Racines n-ièmes ($7 = 2+2+2+1$ pts)

On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E): \quad z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = 0.$$

1. Déterminer les racines carrées de $2i$.

   Correction. Considérons l'équation $w^2 = 2i$ et posons $w = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on obtient $x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$ ce qui veut dire que $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 2$. De plus, $|w|^2 = x^2 + y^2 = |2i| = 2$ et on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

   En ajoutant les deux premières équations, on trouve $2x^2 = 2$ donc $x \in \{-1, 1\}$. En les soustrayant, on trouve de même $2y^2 = 2$ et donc $y \in \{-1, 1\}$. La troisième équation nous indique que x et y ont le même signe, donc les solutions sont

$$w_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad w_2 = -1 - i.$$

2. Déterminer les racines cubiques de $-i$.

   Correction. On souhaite résoudre l'équation $w^3 = -i$. On pose $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et on remarque que $-i = e^{\frac{3i\pi}{2}}$, l'équation devient donc $r^3 e^{-3\theta} = e^{\frac{3i\pi}{2}}$, ce qui implique que

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \{0,1,2\}. \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{3}k, \quad k \in \{0,1,2\}. \end{cases}$$

   Les trois racines cubiques de $-i$ sont donc

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad w_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{i7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad w_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{\frac{i11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

3. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = (z^3 - a)(z^2 - b)$.

   Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors on a

$$(z^3 - a)(z^2 - b) = z^5 - bz^3 - az^2 + ab = z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2,$$

   ce qui implique, par identification, que $-b = -2i$, $-a = i$ et $ab = 2$, ce qui nous permet de dire que

$$a = -i, \quad \text{et} \quad b = 2i$$

   qui vérifient bien $ab = -2i^2 = 2$.

4. En déduire les solution de l'équation (E).

Correction. On a

$$z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = 0 \iff (z^3+i)(z^2-2i) = 0 \iff z^3 = -i \text{ ou } z^2 = 2i.$$

D'après les questions 1. et 2., l'ensemble des solutions de cette équation est donc

$$S = \left\{ 1+i, -1-i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\}.$$

Exercice 2 **PGCD et PPCM** (2 pts) Calculer les PGCD et PPCM de 135 et 375.

Correction. Décomposons en produit de facteurs premiers ces deux entiers :

$$135 = 5 \times 27 = 3^3 \times 5$$
$$375 = 5 \times 75 = 5 \times 5 \times 15 = 3 \times 5^3.$$

Ainsi, $\text{PGCD}(135{,}375) = 3 \times 5 = 15$ et $\text{PPCM}(135{,}375) = 3^3 \times 5^3 = 3375$.

Exercice 3 **Systèmes de congruences** ($9 = 2 + 2 + 2 + 3$ pts)

1. Calculer le PGCD de 714 et 493.

Correction. D'après l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 714 &= 1 \times 493 + 221 \\ 493 &= 2 \times 221 + 51 \\ 221 &= 4 \times 51 + 17 \\ 51 &= 3 \times 17 + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{PGCD}(714, 493) = 17$.

2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $493x + 714y = 51$.

Correction. On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 17 &= 221 - 4 \times 51 \\ &= 221 - 4 \times (493 - 2 \times 221) \\ &= 9 \times 221 - 4 \times 993 \\ &= 9 \times (714 - 493) - 4 \times 993 \\ &= 9 \times 714 - 13 \times 493. \end{aligned}$$

En remarquant que $51 = 3 \times 17$ et en multipliant par 3, on obtient

$$51 = 27 \times 714 - 39 \times 493$$

et $(x_0, y_0) = (-39, 27)$ est une solution particulière de l'équation.

3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $29x + 42y = 3$.

Correction. On remarque que $493 = 17 \times 29$ et $714 = 17 \times 42$. D'après la question précédente, on a ainsi, après division par 17, et en écrivant l'équation à résoudre en premier,

$$\begin{aligned} 29x + 42y &= 3 \\ 29 \times (-39) + 42 \times 27 &= 3 \end{aligned}$$

On soustrait les équation et on obtient $29(x+39)+42(y-27)=0$, soit $29(x+39)=-42(y-27)$. Ainsi, 29 divise $42(y-27)$ et comme 29 et 42 sont premiers entre eux, d'après le Lemme de Gauss on sait que 29 divise $y-27$, et ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y-27=29k$, c'est-à-dire $y=27+29k$. On remplace dans l'équation et on obtient $x+39=-42k$, donc $x=-39-42k$. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$S=\{(x,y)=(-39-42k, 27+29k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 10 & \pmod{29} \\ n \equiv 7 & \pmod{42} \end{cases}$$

Notons que $29 \cdot 42 = 1218$.

Correction. Une façon rapide de résoudre ce système est d'écrire $n=29x+10=42y+7$ pour $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, ce qui permet d'écrire $42y-29x=3$ et de trouver, en utilisant la question précédente, $(x,y)=(39+42k, 27+29k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On trouve ainsi

$$n=29x+10=29(39+42k)+10=1141+1218k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4 Nombres premiers ($4=2+2$ pts)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n=2^{2^n}+1$ le **nombre de Fermat**.

1. Montrer, par récurrence, que la suite $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'identité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}=F_0F_1\cdots F_n+2.$$

Correction. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons la propriété $P(n)$: $F_{n+1}=F_0F_1\cdots F_n+2$.

Initialisation : Pour $n=0$, on a $F_1=2^{2^1}+1=4+1=5$ et $F_0+2=2^{2^0}+1+2=5$, donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$F_0F_1\cdots F_{n+1}+2=F_0F_1\cdots F_nF_{n+1}+2=(F_{n+1}-2)F_{n+1}+2=F_{n+1}^2-2F_{n+1}+2$$

et on calcule directement que

$$F_{n+1}^2-2F_{n+1}+2=\left(2^{2^{n+1}}+1\right)^2-2\left(2^{2^{n+1}}+1\right)+2=2^{2^{n+2}}+1+2\times 2^{2^{n+1}}-2\times 2^{2^{n+1}}=2^{2^{n+2}}+1=F_{n+2}$$

et donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que F_n est impair, donc comme $F_{n+1}=F_0F_1\cdots F_n+2$, on en déduit que $2=F_{n+1}-F_0F_1\cdots F_n$ et donc que si p est un facteur commun à F_{n+1} est à un autre F_k, $k \leqslant n$, alors p divise 2. Comme tous les F_n sont impairs, on en déduit que $\mathrm{PGCD}(F_k, F_{n+1})=1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \leqslant n$. Ainsi, tous les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux-à-deux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons p_n comme le plus petit diviseur premier de F_n. Comme tous les F_n sont premiers entre eux, alors tous les p_n sont différents, et donc il en existe une infinité. Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 **BONUS** (2 pts) Trouver le reste de la division euclidienne de $6^{321} - 4^{237}$ par 5.

Correction. Comme $6 \equiv 1[5]$ et $4 \equiv -1[5]$ on obtient

$$6^{321} - 4^{237} \equiv 1^{321} - (-1)^{237}[5] = 1 - (-1)[5] = 2[5],$$

et donc le reste est 2.