Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2023–2024**

L1 UE : Algèbre 1 (INFO)

Exercice

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Somme

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2).$$
2. En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 2 Application

On considère l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ par $f(m,n) = (2m-n, -3m+2n)$.

1. Montrer que f est injective.
2. L'application f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 Images directes et réciproques.

1. Déterminer $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$, avec $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(x)$.
2. Soit $f : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
3. Montrer que l'application $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(x))$ est bijective.

Exercice 4 Assertions mathématiques et quantificateurs.

Soit $f : E \to F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :
$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$
$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y\,.$$

1. Ecrire les négations non(P) et non(Q).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Laquelle des deux assertions (P) ou (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.