Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2023–2024**

L1 — UE : Algèbre 1 (INFO)

Devoir Surveillé 1 du 19/10/2023

Durée : 1 heure

Tous les documents et dispositifs électroniques sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Somme finie (4 points)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}(2k+i) = \frac{n(n+1)(3n+2)}{2}.$$

Exercice 2 Application (3+2=5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ par $f(m,n) = (2n-m, 2n+m)$.

1. Montrer que f est injective.
2. L'application f est-elle bijective ? Justifier.

Exercice 3 Logique et ensembles (2+1+1+3=7 points)

Soient A, B et C trois ensembles. On considère la proposition P suivante :

$$P : \quad (A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \Longrightarrow B \subset C.$$

1. Ecrire la table de vérité de $(Q \text{ et } R) \Longrightarrow S$, où Q, R et S sont des assertions.
2. Déterminer non(P).
3. Soient $A = [0,4[$, $B = \mathbb{R}\backslash]2,+\infty[$ et $C =]-\infty, 3[$.
   Montrer que ces ensembles vérifient $(A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C)$ ainsi que $B \subset C$.
4. Montrer que, pour tous ensembles A, B et C, la proposition P est vraie.

Exercice 4 Images directes et réciproques (1+2+3=6 points)

Soit $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+1$.

1. Déterminer (sans justification) $f([-2,0])$ et $f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[\right)$.
2. Déterminer (sans justification) $f^{-1}([-2,3])$ et $f^{-1}(\{4\})$.
3. Montrer que $g : [-2,0] \to [1,5]$, $x \mapsto x^2+1$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5 BONUS : Calculs simples dans $\mathbb{C}$ (3 points)

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2-i)(3+5i), \quad z_2 = \frac{1+i}{i}, \quad \text{et} \quad z_3 = \overline{i(2-i)}.$$