

Devoir Surveillé 1 - 23 Octobre 2023

Durée : 1h

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Somme (6 pts). Pour tout entier $n > 0$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer par récurrence que $S_n = T_n$ pour tout $n > 0$.

Exercice 2 Injectivité et surjectivité (6 pts). Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier votre réponse.

- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ définie par $f(n) = (n^3, n^2)$.
- (b) $g : [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi] \setminus \{\frac{1}{2}\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \tan x$.
- (c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x^2 - y^2)$.

Exercice 3 Logique et ensemble (6pts) .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On considère les assertions mathématiques (P) et (Q) suivantes :

$$(P) : \quad \exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = y$$

$$(Q) : \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

1. Ecrire les négations $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. L'assertion (P) est-elle vraie ?
L'assertion (Q) est-elle vraie ? Justifier.
3. Même question avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$. Justifier votre réponse.

Exercice 4 Images direct et réciproques (4pts). Toutes les réponses doivent être justifiées.

- (a) Déterminer $f^{-1} \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[\right)$, avec $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \cos(x)$.
- (c) Montrer que $g : [0, 2] \rightarrow [1, 5]; x \mapsto (x - 2)^2 + 1$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5 BONUS Calculs simples dans \mathbb{C} (3 pts).

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 + i)(5 - 3i), \quad z_2 = \frac{1 + 2i}{4 + 3i}, \quad z_3 = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{2023}.$$