
Exercice

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Nombres complexes

Soit $w \in \mathbb{C}$. On considère l'équation (E_w) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E_w) : z^5 - wz^3 - iz^2 + iw = 0$$

1. Déterminer les racines cubiques de i .
2. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 - 6i$.
3. Soit $w = 0$, résoudre l'équation (E_w) .
4. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 - wz^3 - iz^2 + iw = (z^3 - a)(z^2 - b)$.
5. En déduire les solutions de l'équation (E_w) pour $w = -4$, puis pour $w = -8 - 6i$.

Exercice 2 Équation diophantienne et Théorème des restes chinois

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & (\text{mod } 20) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

Exercice 3 Nombres premiers

1. Vérifier que, pour tout entier $0 \leq n \leq 40$, l'entier $n^2 - n + 41$ est un nombre premier et que pour $n = 41$ et 42 , ils ne le sont pas.
2. Existe-t-il un entier K tel que $n^2 - n + K$ est un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf $n = K, K+1$? Justifier votre réponse.

Exercice 4 Congruence Calculer $16^{2023} \pmod{11}$ et $16^{2023} \pmod{13}$.