

**Devoir Surveillé 2 du 07/12/2022**

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

**Exercice 1 Racines  $n$ -ièmes** ( 7 = 2 + 2 + 2 + 1 pts )

On considère l'équation  $(E)$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  suivante :

$$(E) : z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = 0.$$

1. Déterminer les racines carrées de  $2i$ .
2. Déterminer les racines cubiques de  $-i$ .
3. Déterminer  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = (z^3 - a)(z^2 - b)$ .
4. En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .

**Exercice 2 PGCD et PPCM** ( 2 pts ) Calculer les PGCD et PPCM de 135 et 375.

**Exercice 3 Systèmes de congruences** ( 9 = 2 + 2 + 2 + 3 pts )

1. Calculer le PGCD de 714 et 493.
2. Trouver une solution particulière  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  de l'équation  $493x + 714y = 51$ .
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne  $29x + 42y = 3$ .
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 10 & (\text{mod } 29) \\ n \equiv 7 & (\text{mod } 42) \end{cases}$$

Notons que  $29 \cdot 42 = 1218$ .

**Exercice 4 Nombres premiers** ( 4 = 2 + 2 pts )

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $F_n = 2^{2^n} + 1$  le **nombre de Fermat**.

1. Montrer, par récurrence, que la suite  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie l'identité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2.$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

**Exercice 5 BONUS** ( 2 pts ) Trouver le reste de la division euclidienne de  $6^{321} - 4^{237}$  par 5.