

Devoir Surveillé 2 du 07/12/2022

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Racines n -ièmes (7 = 2 + 2 + 2 + 1 pts)

On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = 0.$$

1. Déterminer les racines carrées de $2i$.
2. Déterminer les racines cubiques de $-i$.
3. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 - 2iz^3 + iz^2 + 2 = (z^3 - a)(z^2 - b)$.
4. En déduire les solutions de l'équation (E) .

Exercice 2 PGCD et PPCM (2 pts) Calculer les PGCD et PPCM de 135 et 375.

Exercice 3 Systèmes de congruences (9 = 2 + 2 + 2 + 3 pts)

1. Calculer le PGCD de 714 et 493.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $493x + 714y = 51$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $29x + 42y = 3$.
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 10 & (\text{mod } 29) \\ n \equiv 7 & (\text{mod } 42) \end{cases}$$

Notons que $29 \cdot 42 = 1218$.

Exercice 4 Nombres premiers (4 = 2 + 2 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$ le **nombre de Fermat**.

1. Montrer, par récurrence, que la suite $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'identité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2.$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 BONUS (2 pts) Trouver le reste de la division euclidienne de $6^{321} - 4^{237}$ par 5.