

Exercices

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 Racines n^{eme} Ici, on veut trouver tous les solutions de l'équation $(E) : z^8 + 4z^4 + 16 = 0$ par deux méthodes :

1. Voir l'équation (E) comme une équation sur z^4 ;
 - (a) Trouver les valeurs de z^4 .
 - (b) Calculer les racines 4ème de ce que vous avez trouver dans la question précédente.
 - (c) Conclure.
2. À l'aide de $z^8 + 4z^4 + 16 = (z^8 + 8z^4 + 16) - 4z^4$,
 - (a) Factoriser $z^8 + 4z^4 + 16$. On précisera les deux équations sur z^2 ainsi obtenues.
 - (b) Résoudre ces deux équation algébriques. Ensuite, calculer les racines carrées de ces solutions.
 - (c) Conclure.

Exercice 2 Équation diophantienne et Théorème des restes chinois

1. Calculer le PGCD de 720 et 252.
2. Trouver une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $720x + 252y = 108$.
3. En déduire les solutions de l'équation diophantienne $20x + 7y = 3$.
4. Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & (\text{mod } 20) \\ n \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

Exercice 3 Arithmétique Soit p un nombre premier supérieur à 2.

1. Pour tout entier k entre 1 et $p - 1$, montrer que le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p .
2. Montrer, par récurrence, que $p|a^p - a$ pour tout entier naturel a .
3. En déduire que si a et p sont premier entre eux, $a^{p-1} - 1$ est divisible par p .
(Petit théorème de Fermat)

Exercice 4 Nombres premiers

1. Vérifier que, pour tout entier $0 \leq n \leq 40$, l'entier $n^2 - n + 41$ est un nombre premier et que pour $n = 41$ et 42 , ils ne le sont pas.
2. Existe-t-il un entier K tel que $n^2 - n + K$ est un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf $n = K, K+1$? Justifier votre réponse.

Exercice 5 Congruence Calculer $16^{2023} \pmod{11}$ et $16^{2023} \pmod{13}$.