Correction Feuille 1 : Calculs algébriques

Exercice 1 *Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :*

1) $(125)^{-2/3}$ *2)* $(-5x)^3$ *3)* $\left(\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^2$ *4)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

5) $-2\sqrt{9y}+10\sqrt{y}$ *6)* $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$ *7)* $5^{-1/2}\cdot 5x^{11/6}\cdot(5x)^{-3/2}$ *8)* $\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$

9) $\frac{y}{5x-y}+\frac{5x}{y-5x}+1$ *10)* $\frac{\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}}{3x+5}$ *11)* $\frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}}$ *12)* $\frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}}$

Correction

1. $\sqrt[3]{125}=5$, *d'où* $(125)^{-2/3}=1/25$.
2. $(-5x)^3=(-1)^3\,5^3\,x^3 \,=\, -125x^3$.
3. *Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a*
$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} \,=\, \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\,;$$
on en déduit que
$$\frac{x^{-2}}{y^{-2}}\left(\frac{x}{y}\right)^2 \,=\, 1\,.$$
4. *On a* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} \,=\, \left(27^{1/4}\right)^{1/3} \,=\, 27^{(1/4)\cdot(1/3)} \,=\, \left(27^{1/3}\right)^{1/4} \,=\, 3^{1/4} \,=\, \sqrt[4]{3}$.
5. $\sqrt{9y} \,=\, \sqrt{9}\,\sqrt{y}$ *; donc, on peut factoriser par $2\sqrt{y}$ et on trouve*
$$-2\sqrt{9y}+10\sqrt{y} \,=\, 2\sqrt{y}\,\left(5-\sqrt{9}\right) \,=\, 4\,\sqrt{y}\,.$$
6. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1} \,=\, \left(x^2y^{-2}\right)^{(-1\cdot(-1))} \,=\, x^2/y^2$.
7. *On a*
$$5^{-1/2}\cdot 5x^{11/6}\cdot(5x)^{-3/2} \,=\, 5^{-1/2+1-3/2}\,x^{11/6-3/2} \,=\, 5^{-1}\,x^{1/3} \,=\, \frac{\sqrt[3]{x}}{5}\,.$$
8. *On a*
$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x} \,=\, \frac{x-(x+1)}{(x+1)\,x} \,=\, \frac{-1}{(x+1)\,x}$$
$$\frac{1}{y/x} \,=\, \frac{x}{y}\,,$$
d'où on trouve $\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} \,=\, \frac{-1}{(x+1)\,y}$.
9. *On a*
$$\frac{y}{5x-y}+\frac{5x}{y-5x}+1 \,=\, \frac{y}{5x-y}-\frac{5x}{5x-y}+1 \,=\, \frac{y-5x}{5x-y}+1 \,=\, 0\,.$$
10. *En utilisant le fait que $x^2-1=(x-1)(x+1)$, le même calcul de l'expression 8 montre que le numérateur est égal à $\frac{3x+5}{x^2-1}$, et donc*
$$\frac{\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}}{3x+5} \,=\, \frac{1}{x^2-1}\,.$$

11. *On écrit le dénominateur de la façon suivante :*

$$x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4} \;=\; \frac{1}{x}\;+\;\frac{1}{x^2}\;+\;\frac{1}{x^3}\;+\;\frac{1}{x^4}\;=\;\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}\,.$$

En factorisant le numérateur par x, on trouve alors

$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}} \;=\; \frac{x(x^3+x^2+x+1)}{\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}} \;=\; x^5\,.$$

12. *On observe que*

$$x^5+1 \;=\; x^5-(-1) \;=\; (x+1)\,(x^4-x^3+x^2-x+1)\,.$$

D'autre côté, en raisonnant comme au point 11, le dénominateur s'écrit comme

$$x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6} \;=\; \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^6}\,,$$

d'où on peut déduire que

$$\frac{1+x^5}{x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}-x^{-5}+x^{-6}} \;=\; x^6(x+1)\,.$$

Exercice 2 *Soit a, b, c et d des réels. Développer $(a+b+c+d)^2$ puis $(a+b+c)^3$.*

Correction

C'est un calcul.

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 \;&=\; a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\\ (a+b+c)^3 \;&=\; (a+b+c)^2\,(a+b+c) \;=\; (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)\,(a+b+c)\\ &=\; a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc\,.\end{aligned}$$

Exercice 3 *Soit x et y deux réels. On suppose que $x-y=1$. Calculer $x^3-3xy-y^3$.*

Correction *On observe que $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. En utilisant l'hypothèse $x-y=1$, on trouve donc*

$$x^3-3xy-y^3 \;=\; x^2+xy+y^2-3xy \;=\; (x-y)^2 \;=\; 1\,.$$

Exercice 4

1. *Rappeler la preuve, faite en cours, de la propriété suivante : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

2. *Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+2}$.*
3. *En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.*
4. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+1)(n!)^2}$.*

Correction

1. *Fait en cours.*

2. *En calculant le dénominateur en commun, on a*

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k+2a}{k(k+2)},$$

qui implique que $a = 1$ *et* $b = -a = -1$.

3. *En utilisant le résultat précédent, on peut écrire*

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

4. *On utilise encore le résultat du point 2 pour écrire*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)} = 2^n \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)}.$$

Bien sûr, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1/n!$. *D'autre côté, on a aussi*

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)} = \prod_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = 2\left(\prod_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right)\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n+2} = 2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n+2}.$$

En mettant tout ensemble, on trouve

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = 2^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}\,\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n+2}.$$

Exercice 5 1. *Donner deux différentes preuves de la formule du cours suivante : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) *En effectuant une démonstration par récurrence.*

b) *En montrant préalablement, par changement de variable, l'identité :*

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k.$$

2. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

<u>**Correction**</u>

1. *Pour (a), on commence par vérifier l'initialisation : pour* $n = 1$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} k = 0 + 1 = 1$, *tandis que* $1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1$. *La formule est donc initialisée. On vérifie maintenant l'héréditariété. Supposons que la propriété est vraie pour* n, *donc*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il faut prouver la propriété pour $n+1$, *c'est-à-dire il faut montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On commence par écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$. *En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a*

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

L'hérédité est donc vérifiée, et, par conséquent, la formule est prouvée pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Pour la partie (b), on admet l'identité (qui est un simple changement de variable). On appelle

$$S := \sum_{k=0}^{n} k$$

la quantité à déterminer. L'identité nous dit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = S$. *Mais, en développant le membre de gauche, on a*

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 - S = n(n+1) - S.$$

On en déduit que $n(n+1) - S = S$, *d'où* $S = n(n+1)/2$.

2. *C'est un calcul : grâce à la formule précédente, on peut calculer*

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 6 1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right) = n(n+1)^2$.

2. *En utilisant sans les démontrer (ce serait facile par récurrence) les deux identités* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, *montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.$$

Correction

1. *En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a*

$$\sum_{j=0}^{n}(i+j) = \sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j = (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui donne

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) = (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} 1 = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)^2}{2} = n(n+1)^2.$$

La formule est donc prouvée.

2. *De façon analogue, on a*

$$\sum_{j=0}^{i} ij = i\sum_{j=0}^{i} j = \frac{i^2(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(i^3 + i^2\right).$$

En utilisant cette propriété, on calcule

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{i} i^3 + \sum_{j=0}^{i} i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{24}\big(3n(n+1)+2(2n+1)\big),\end{aligned}$$

d'où on trouve facilement l'expression finale.

Exercice 7 *1. Pour $0 \le i \le n$ et $0 \le j \le n$, quelles valeurs prend l'entier $Max(i,j)$? Combien de fois prend-il une valeur k fixée ?*

2. En déduire que

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j)\right) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)k.$$

3. En utilisant la formule de sommation des carrés des entiers consécutifs rappelée à l'exercice précédent, en déduire que :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} Max(i,j)\right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Correction

1. *Étant donné que $0 \le i \le n$ et $0 \le j \le n$, l'entier $Max(i,j)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n. Maintenant, si on fixe k dans le même intervalle, on aura $Max(i,j) = k$ pour :*
   - *toutes les couples (i,k), avec $0 \le i < k$: on a donc k couples ;*
   - *toutes les couples (k,j), avec $0 \le j < k$: encore k couples ;*
   - *la couple (k,k).*

   En total, ça fait $2k+1$ fois.
2. *Deux solutions possibles.*
   (a) *On découpe la somme à l'intérieur comme*

   $$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} Max(i,j) &= \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j = i(i+1) + \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i} j\\ &= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}.\end{aligned}$$

   Si maintenant on calcule la somme à l'extérieur, en utilisant les formules des exercices 1-5 et 1-6, on trouve facilement

   $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} Max(i,j) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(4n+5).$$

   C'est exactement le même résultat qu'on trouve quand on calcule la somme à droite, après avoir fait les multiplications à l'intérieur.

   (b) *Vu que la fonction peut prendre toutes les valeurs k entre 0 et n, et que la valeur k est prise $2k+1$ fois, on peut écrire notre somme comme la somme des valeurs que la fonction prend, multipliées par le nombre des fois qu'elles sont prises : notamment,*

   $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} Max(i,j) = \sum_{k=_0}^{n} k(2k+1).$$
3. *La réponse donnée au point précédent répond aussi á cette question.*

Exercice 8 *1. En utilisant la formule du binôme, calculer les sommes* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ *et* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

2. *a) Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $p \in \{1,\dots,n\}$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

3. *À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout* $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Correction

1. *On a*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} = (1-1)^n = 0\,.$$

2. *Pour* n *et* p *comme dans le texte, on calcule*

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-p-1+1)!\,(p-1)!} = n\,\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(p-1)\big)!\,(p-1)!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

On en déduit la formule donnée. En fait, pour $n=0$, *il n'y a rien a prouver (on trouve* $0=0$, *qui est toujours vrai). Supposons alors* $n \geq 1$. *On remarque que le premier terme dans la somme à gauche (correspondant à* $p=0$*) est nul ; donc on peut écrire*

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}\,,$$

qui est exactement ce qu'on voulait prouver.

3. *Observons que, si* $n=0$, *les deux membres de l'égalité à prouver valent* 1, *et donc l'égalité est vraie. Supposons maintenant* $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$. *On commence par remarquer que*

$$(*)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k}.$$

Maintenant, la formule du triangle de Pascal nous dit que, pour tout $k \geq 1$ *et tout* $p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1} = \binom{p+k+1}{k}.$$

En prenant la somme sur $k = 1\dots n$ *à gauche et à droite, on déduit que*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k+1}{k}.$$

En faisant le changement de variable $j = k+1$ *dans la somme à droite, on trouve*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k-1} = \sum_{j=2}^{n+1}\binom{p+j}{j-1} = \sum_{j=1}^{n}\binom{p+j}{j-1} - 1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

On peut simplifier le terme qui apparaît à droite et à gauche, et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{k} = -1 + \binom{p+n+1}{n}.$$

En utilisant cette égalité dans $(*)$, *on déduit tout de suite la formule souhaitée.*

Exercice 9 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*
2. *Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.*
3. *Montrer que $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}$. (Indication : on pourra considérer l'entier $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$).*

__Correction__

1. *C'est un calcul simple : par définition, on a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

2. *L'inégalité à prouver est équivalent à l'inégalité suivante : pour tout $0 \leq k \leq n-1$,*

$$\frac{1}{k!\,(2n-k)!} < \frac{1}{(k+1)!\,(2n-k-1)!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(k+1)!}{k!} < \frac{(2n-k)!}{(2n-k-1)!},$$

c'est-à-dire $k+1 < 2n-k$, ce qui est toujours vrai (car $k \leq n-1$). Soit maintenant $k = n+1, \dots 2n$: grâce à la question du point 1, on peut écrire

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}.$$

Vu que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a que $0 \leq 2n-k \leq n-1$, qui implique (grâce à l'inégalité prouvée ci-dessus)

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} < \binom{2n}{2n-k+1} == \binom{2n}{k-1}.$$

En conclusion, la valeur maximale est atteinte pour $k = n$, et on a donc

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

pour tout k entre 0 et $2n$.