Feuille 2 : Ensembles et applications

Exercice 1 *1. On note* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{0, 1, 2, 3\}$. *Décrire les ensembles* $A \cap B$, $A \cup B$.

2. *On note* $A = [1, 3]$ *et* $B = [2, 4]$. *Déterminer* $A \cap B$ *et* $A \cup B$.
3. *On note* $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ *et* $C =]-5, +\infty[$. *Déterminer* $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ *et* $B \cup C$.

Correction

1. $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ *et* $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. $A \cap B = [2, 3]$ *et* $A \cup B = [1, 4]$.
3. $A \cap B =]-2, 3]$, $A \cup B =]-\infty, 7]$, $B \cap C =]-2, 7]$ *et* $B \cup C =]-5, +\infty[$.

Exercice 2 *Soit* A *et* B *deux ensembles. Montrer l'équivalence :*

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Correction *On raisonne par double-implication.*
Montrons que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. *Supposons que* $A \subset B$. *Alors,* $A \setminus B = \emptyset$, *d'où*

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = B.$$

Montrons maintenant que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$. *On suppose que* $A \cup B = B$. *Alors, comme* $A \subset A \cup B$, *on a bien* $A \subset A \cup B = B$.

Exercice 3 *Soit* A, B *et* C *trois ensembles.*

1. *L'implication suivante est-elle vraie :*

$$(A \cup B) \not\subset C \implies (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C) \,?$$

2. *On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes :* $A \cup B \subset A \cup C$ *et* $A \cap B \subset A \cap C$. *Montrer que* $B \subset C$.

Correction

1. *La contraposée de cette implication est*

$$(A \subset C \ \text{ et } \ B \subset C) \implies A \cup B \subset C$$

et cette implication est vraie.

2. *Soit* $x \in B$. *Montrons que* $x \in C$. *Comme* $x \in B$, *on a* $x \in A \cup B$, *d'où* $x \in A \cup C$ *par hypothèse. Si* $x \in C$, *c'est terminé. Si* $x \in A$, *on a* $x \in A \cap B$. *Par hypothèse, on a donc* $x \in A \cap C$ *ce qui entraine* $x \in C$. *Dans tous les cas* $x \in C$ *et on a montré que* $B \subset C$.

Exercice 4 *Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x = |x|$ *ou* $x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 > 0$.

Correction

1. *négation*: $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \neq |x| \text{ et } x \neq -|x|)$. *L'énoncé est vrai mais pas sa négation.*
2. *négation*: $(\exists x \in \mathbb{R}, x \neq |x|)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq -|x|)$. *La négation est vraie mais pas l'énoncé.*
   En effet, on a bien (par exemple) $-2 \neq |-2|$ *et* $3 \neq -|3|$.
3. *négation*: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 \geq 0$. *La négation est vraie mais pas l'énoncé.*
   En effet, une fois x *fixé, il suffit de choisir* y *de telle sorte que* $y \geq x - x^2$.
4. *négation*: $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y - x + x^2 \leq 0$. *L'énoncé est vrai mais pas sa négation.*
   En effet, il suffit d'étudier le trinôme du second degré $P_y(x) = x^2 + x - y$. *Celui-ci a pour discriminant* $\Delta_y = 1 - 4y$. *Ainsi, si* $1 - 4y < 0$, *c'est-à-dire* $y > 1/4$, *alors* $P_y(x) > 0$ *pour tout réel* x. *Il existe donc bien un réel* y *(par exemple* $y = 1$*) tel que* $x^2 + x - y > 0$ *pour tout réel* x.

Exercice 5 *En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *:*

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Correction *La contraposée de cette implication est*

$$a > b \implies (\exists \varepsilon > 0,\ a > b + \varepsilon)\,.$$

Celle-ci est vraie. En effet, par exemple, posons $\varepsilon := \dfrac{1}{2}(a-b) > 0$. *Alors,* $b + \varepsilon = \dfrac{1}{2}(a+b) < a$ *car* $a - \dfrac{1}{2}(a+b) = \dfrac{1}{2}(a-b) > 0$.

Exercice 6 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur* I *à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :*

1. f *s'annule ;*
2. f *est l'application nulle ;*
3. f *n'est pas une application constante ;*
4. f *ne prend jamais deux fois la même valeur ;*
5. f *s'annule au plus une fois.*

Correction

1. $\exists x \in I,\ f(x) = 0.$
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0.$
3. $\exists x \in I, \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y).$
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$
5. $\nexists (x,y) \in I^2, x \neq y,\ f(x) = f(y) = 0.$

Exercice 7

1. *Soient les fonctions* f *et* g *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f(x) = 3x+1$ *et* $g(x) = x^2 - 1$. *Calculer* $f \circ g$ *et* $g \circ f$. *Qu'observe-t-on ?*
2. *À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions* u *et* v *telles que* $h = u \circ v$ *en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :*

   (a) $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; *(b)* $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$; *(c)* $h(x) = \sqrt{3x-1}$.

Correction

1. *Par définition,*

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x)+1 = 3(x^2-1)+1 = 3x^2-2,$$
$$g\circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2-1 = (3x+1)^2-1 = 9x^2+6x.$$

   On constate que $f\circ g \neq g\circ f$.

2. *Par exemple,*
   (a) $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto \sin x$ *et* $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto x+\dfrac{\pi}{2}$,
   (b) $u:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}; x\mapsto \dfrac{1}{x}$ *et* $v:\mathbb{R}\setminus\{-7\}\to\mathbb{R}^*; x\mapsto x+7$,
   (c) $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+; x\mapsto \sqrt{x}$ *et* $v:[\dfrac{1}{3},+\infty[\to\mathbb{R}_+; x\mapsto 3x-1$.

Exercice 8 *Soit* f *la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *par* $f(x)=2x+1$. *Déterminer pour tout* $x\in\mathbb{R}$ $(f\circ f\circ f\circ f\cdots\circ f)(x)$ *(où* f *apparaît* n *fois) en fonction de* $n\in\mathbb{N}^*$.

Correction *Montrons* $(F_n): f^n(x) = 2^n(x+1)-1$ *par récurrence sur* $n\in\mathbb{N}^*$.

Initialisation. $2^1(x+1)-1 = 2(x+1)-1 = 2x+1$, *d'où* (F_1) *est vraie.*
Héréditaire. *Supposons que* (F_n) *est vraie. En rang* $n+1$, *on a*

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = 2f^n(x)+1 = 2(2^n(x+1)-1)+1 = 2^{n+1}(x+1)-2+1 = 2^{n+1}(x+1)-1,$$

d'où la formule (F_{n+1}) *est aussi valable. Par récurrence sur* $n\in\mathbb{N}^*$, *on en conclut que la formule* (F_n) *est vraie pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 9 *Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?*

1. $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
2. $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
3. $\begin{aligned} f:\mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}\\ n &\mapsto n\end{aligned}$
4. $\begin{aligned} f:\mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto 2x\end{aligned}$
5. $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto 8x+3\end{aligned}$
6. $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \{14\}\\ x &\mapsto 14\end{aligned}$
7. $\begin{aligned} f:\{17\} &\longrightarrow \{12;17\}\\ x &\mapsto 17\end{aligned}$
8. $\begin{aligned} f:\mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{x}\end{aligned}$
9. $\begin{aligned} f:\{0\} &\longrightarrow \{0\}\\ x &\mapsto 0\end{aligned}$
10. $\begin{aligned} f:\{1\} &\longrightarrow \{1/2\}\\ x &\mapsto \frac{1}{x+1}\end{aligned}$
11. $\begin{aligned} f:\mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}\\ n &\mapsto n+1\end{aligned}$
12. $\begin{aligned} g:\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ n &\mapsto n+1\end{aligned}$
13. $\begin{aligned} k:\mathbb{R}\setminus\{1\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{x+1}{x-1}.\end{aligned}$

Correction *(détails vus en TD)*

1. *ni injective ni surjective,*
2. *surjective mais pas injective,*
3. *bijective,*
4. *injective mais pas surjective,*
5. *bijective,*
6. *surjective mais pas injective,*
7. *injective mais pas surjective,*
8. *injective mais pas surjective,*
9. *bijective,*
10. *bijective,*
11. *injective mais pas surjective,*
12. *bijective,*
13. *injective mais pas surjective.*

Exercice 10 1. *On définit* $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ *pour tout* $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ *par* $f(m,n)=mn$. *Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?*

2. *On définit* $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$ *pour tout* $k\in\mathbb{N}$ *par* $g(k)=(k,(k+1)^2)$. *Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?*

Correction

1. *pas injective car $f(m,0)=0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, surjective car $f(m,1)=m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*
2. *injective car $g(k)=g(l)$ implique que $k=l$, mais pas surjective car, par exemple, $(0,0)$ n'a pas un antécédent.*

Exercice 11 *Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x)=x^2$.*

1. *Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.*
2. *Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.*
3. *Donner des ensembles I et J tels que f ne soit ni injective ni surjective.*
4. *Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.*

Correction *Par exemple,*

1. *$I=[0,1]$ et $J=[-1,1]$,*
2. *$I=[-1,1]$ et $J=[0,1]$,*
3. *$I=J=[-1,1]$,*
4. *$I=J=[0,1]$.*

Exercice 12

1. *Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Montrer que :*
$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$
2. *On définit $f : \mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\}) \to \mathbb{Q}$ par :*
$$f(p,q) = p + \frac{1}{q}.$$
Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Correction

1. *Comme $q_i \geq 2$, on a $0 < \frac{1}{q_i} \leq \frac{1}{2}$ $(i=1,2)$. En particulier, on a $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{q_2} < 0$ qui implique que*
$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$
2. *Soient (p_1,q_1) et (p_2,q_2) deux éléments de $\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})$ ayant un même image par f, i.e.,*
$$f(p_1,q_1)=f(p_2,q_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1+\frac{1}{q_1} = p_2 + \frac{1}{q_2}, \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2} = -p_1+p_2.$$
Comme $-p_1+p_2 \in \mathbb{Z}$ et que $\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2} \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ d'après la première question, on en déduit que $p_1=p_2$ et $q_1=q_2$, c'est-à-dire, l'application f est injective. Mais f ne peut être surjective car pour un $q \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\frac{1}{q} \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$ qui signifie que l'application f ne peut pas prendre une valeur dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13 *On définit une partie du plan par $D=\{(x,y)\in,\mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$ puis une application $f : D \to \mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=(x^2+y^2, 2xy)$.*

1. *Représenter graphiquement D.*
2. (a) *Montrer que si deux couples de réels (x_1,y_1) et (x_2,y_2) vérifient le système :*
$$\begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1-y_1=x_2-y_2 \end{cases}$$
alors $x_1=x_2$ et $y_1=y_2$.
   (b) *En déduire que f est injective.*

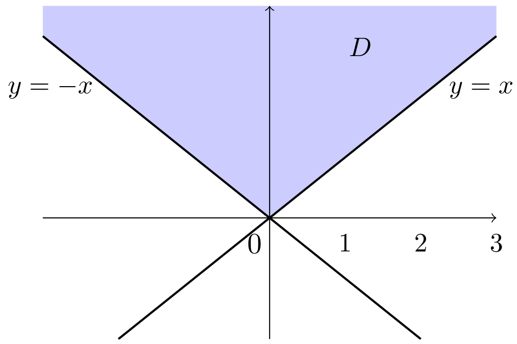
3. *Est-ce que f est surjective ?*

Correction

1. *Par définition, les inégalites $-y \leq x \leq y$ sont équivalentes à*

$$-y \leq x \quad \text{et} \quad x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \geq -x \quad \text{et} \quad y \geq x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \geq \max\{-x, x\} = |x|.$$

Donc, l'ensemble D est représenté par la partie blue de dessin suivant:



2. (a) *Additionnant les deux équations, on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$. Ensuite, remplaçant dans ces deux équations, on trouve que $y_1 = y_2$.*

   (b) *Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points dans D tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Par définition, on a*

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 & \cdots \quad L_1, \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 & \cdots \quad L_2. \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, i.e., $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$. Comme $x + y \geq 0$ sur D, on en déduit que $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 (\geq 0)$. De même, $L_1 - L_2$ donne $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$. Comme $x - y \leq 0$ sur D, on en déduit que $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 (\leq 0)$. D'après 2. (a), cela donne $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, qui montre que f est injective.

3. *Comme $x^2 + y^2 \geq 0$ quoi que ce soit $x, y \in \mathbb{R}$, f ne peut être surjective.*

Exercice 14 *Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

1. *Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?*
4. *Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
5. *Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
6. *Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :*

   (a) $g \circ f = \mathrm{id}_E$; (b) $f \circ g = \mathrm{id}_F$; (c) $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Correction

1. *Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, i.e., $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme g est injective, ceci implique que $f(x_1) = f(x_2)$, d'où $x_1 = x_2$ car f est aussi injective.*
2. *Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc, $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ qui montre que $g \circ f$ est surjective.*
3. *D'après les deux questions précédentes, $g \circ f$ est bijective.*

4. *Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors, on a*
$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$
Par hypothèse, on a $x_1 = x_2$, d'où f est injective.
5. *Soit $z \in G$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Donc, posons $y = f(x) \in F$, on voit que $g(y) = g(f(x)) = z$, d'ou g est surjective.*
6. *(a). g est surjective (d'après 5.) et f est injective (d'après 4.).*
(b). f est surjective (d'après 5.) et g est injective (d'après 4.).
(c). D'après 4. et 5., f est bijective.

Exercice 15 *On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$.*

1. *Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?*
2. *Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?*

Correction

1. *Comme f n'est pas surjective, $f \circ g$ ne peut être surjective. En particulier, $f \circ g$ ne peut être bijective, donc une telle g n'existe pas.*
2. *Il existe une telle h ; en effet, il suffit de prendre une application h vérifiant $h(n) = \sqrt{n}$ s'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m^2$.*

Exercice 16 1. *Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :*
$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 2$$
(a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
(b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.

2. *Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.*

Correction

1. *Par définition, $f(1) = \{4\}$, $f(\{1, 3\}) = \{2, 4\}$, $f(\{3, 4\}) = \{2\}$ et $f(\emptyset) = \emptyset$.*
2. *Par définition, $f^{-1}(\{2\}) = \{3, 4\}$, $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3, 4\}$ et $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$.*

Exercice 17 *Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.*

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0, 1])$ *pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ *pour* $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0, 1])$ *pour* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0, 1])$;
11. $(\cos_{|[3\pi,7\pi]})^{-1}([0, 1])$;
12. $\cos^{-1}([0, 1])$;

Correction

1. $\{0\}$,
2. $\emptyset$,
3. $]0, e^2]$,
4. $]-\infty, 1]$,
5. $\mathbb{R}$,
6. $[e^3, +\infty[$,
7. $[-1, 1]$,
8. $[-1/2, 1]$,
9. $[0, 1]$,
10. $[0, \pi/2]$,
11. $[7/2\pi, 9/2\pi] \cup [11/2\pi, 13/2\pi]$,
12. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n-1/2)\pi, (2n+1/2)\pi]$.

Exercice 18 *Soient* E *un ensemble et* f *une application de* E *dans lui-meme telle que* $f\Big(f(E)\Big) = E$. *Montrer que* f *est surjective.*

Correction *Par définition, on a* $f(E) \subset E$, *d'où* $f(f(E)) \subset f(E)$. *Donc, par hypothèse, on a* $E \subset f(E)$. *Grâce aux double inclusions, on en déduit que* $f(E) = E$, *i.e.,* f *est surjective.*

Exercice 19 *Soit* $f : X \to Y$ *une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) f *est injective ;*

ii) Pour tous A_1, A_2 *parties de* X, *on a* $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Correction *Il a été démontré en cours que, pour tout* A_1, A_2 *parties de* X, *on a* $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. *Supposons que* f *est injective. Montrons que pour tous* A_1, A_2 *parties de* X, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$. *Soient* A_1, A_2 *deux parties de* X, *et soit* $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, *alors* $y \in f(A_1)$ *et il existe donc* $x_1 \in A_1$ *tel que* $y = f(x_1)$ *et, de même,* $y \in f(A_2)$ *et il existe* $x_2 \in A_2$ *tel que* $y = f(x_2)$. *Comme* f *est injective et que* $f(x_1) = f(x_2) = y$, *on a* $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. *Ainsi,* $y \in f(A_1 \cap A_2)$ *et on a montré i)* $\Rightarrow$ *ii).*
Supposons que pour tous A_1, A_2 *parties de* X, $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ *et montrons que* f *est injective. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe* $(x_1, x_2) \in X^2$ *tels que* $x_1 \neq x_2$ *et* $f(x_1) = f(x_2)$. *Comme* $f(\{x_1\}) \cap f(X \backslash \{x_1\}) = \emptyset$ *par hypothèse (on a choisi* $A_1 = \{x_1\}$ *et* $A_2 = X \backslash \{x_1\}$*), alors il est clair que* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *car* $x_2 \in X \backslash \{x_1\}$. *Ainsi* f *est injective.*

Exercice 20 *Montrer que chacune des applictions suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 3x + 1$.
2. $g : \;]e, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $a(s,t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $b(s,t) = (s+t, s-t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ *définie par* $F(t,n) = t \cdot 10^n$.

Correction

1. *Soit* $y \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *alors on a*
$$y = f(x) \iff y = 3x + 1 \iff x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, tout réel y *admet un unique antécédent* $x = \frac{y-1}{3}$ *par* f *dans* $\mathbb{R}$. *On en déduit que* f *est bijective de bijection réciproque* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.
2. *Soit* $y \in \mathbb{R}$ *et* $x \in]e, +\infty[$, *alors on a*
$$y = g(x) \iff y = \ln(\ln(\ln x)) \iff x = e^{e^{e^y}} > e.$$
Ainsi, tout réel y *admet un unique antécédent* $x = e^{e^{e^y}}$ *par* g *dans* $]e, +\infty[$. *On en déduit que* g *est bijective de bijection réciproque* $g^{-1} : \mathbb{R} \to]e, +\infty[$ *définie pour tout réel* x *par* $g(x) = e^{e^{e^x}}$.
3. *Soit* $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, *alors on a*
$$(y_1, y_2) = a(s,t) \iff (y_1, y_2) = (2s, 3t) \iff (s,t) = (y_1/2, y_2/3) \in \mathbb{R}^2.$$
Ainsi, tout point $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *admet un unique antécédent* $(s,t) = (y_1/2, y_2/3)$ *par* a *dans* $\mathbb{R}^2$. *On en déduit que* a *est bijective de bijection réciproque* $a^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ *par* $a^{-1}(s,t) = (s/2, t/3)$.
4. *Soit* $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, *alors on a*
$$(y_1, y_2) = b(s,t) \iff (y_1, y_2) = (s+t, s-t) \iff (s,t) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, tout point $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *admet un unique antécédent* $(s,t) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$ *par* b *dans* $\mathbb{R}^2$. *On en déduit que* b *est bijective de bijection réciproque* $b^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ *par* $b^{-1}(s,t) = \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$.

5. *Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors il est clair (pensez à la division euclidienne) qu'il existe un unique $n_y \in \mathbb{Z}$ tel que $y \times 10^{-n_y} \in [1, 10[$. On note $t_y = y \times 10^{-n_y}$ et ce nombre est lui aussi unique. Ainsi, F est bijective de bijection inverse $F^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to [1, 10[\times \mathbb{Z}$ est définie pour tout réel $y > 0$ par $F^{-1}(y) = (n_y, y \times 10^{-n_y})$.*

Exercice 21 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.*

Correction *Raisonnons par l'absurde et supposons que f^{-1} n'est pas strictement croissante. Il existe alors $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y_1 < y_2$ et $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. On applique f à l'inégalité précédente en utilisant le fait que f est strictement croissante, ce qui nous donne $f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right)$, c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$, ce qui est impossible. On en déduit que f^{-1} est strictement croissante.*

Exercice 22 *Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1}, montrer que f est bijective.*

Correction *Comme $g \circ f$ est bijective, on obtient*

$$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = \mathrm{id}_G \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E.$$

De la première équation, on déduit : $f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1}$, puis, en composant par g à droite, $f \circ \big((g \circ f)^{-1} \circ g\big) = \mathrm{id}_F$. Il existe donc une application $h = (g \circ f)^{-1} \circ g$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_F$.
De la deuxième équation, on déduit : $\big((g \circ f)^{-1} \circ g\big) \circ f = \mathrm{id}_E$, et ainsi $h \circ f = \mathrm{id}_E$.
On en déduit donc que f est bijective de bijection réciproque $f^{-1} = h = (g \circ f)^{-1} \circ g$.

Exercice 23 *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$.*

1. *Soit m un entier positif. Déterminer tous les antécédents de m.*
2. *Soit m un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de m.*
3. *L'application f est-elle une bijection ?*

Correction

1. *Soit $m \in \mathbb{N}$, alors m admet comme unique antécédent $2m$.*
2. *Soit $m \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, alors $m = -k-1$ implique que $k = -m-1$, donc $2k+1 = -2m-1$ et ainsi $f(-2m-1) = f(2(-m-1)+1) = m+1-1 = m$. L'unique antécédent de m est donc $-2m-1 \in \mathbb{N}$.*
3. *Tout entier $m \in \mathbb{Z}$ admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{N}$, donc f est bijective.*

Exercice 24 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une application strictement croissante.*

1. *Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.*
2. *Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \to K$ soit bijective.*

Correction

1. *Raisonnons par contraposée et supposons que f n'est pas injective. Montrons que f n'est pas strictement croissante. En effet, si f n'est pas injective, il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. En particulier, on a deux possibilités :*
   - *$x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$;*
   - *$x_2 < x_1$ et $f(x_1) = f(x_2)$.*

   Dans les deux cas, f n'est pas strictement croissante.
2. *Pour que f soit bijective, il faut que f soit surjective car elle est déjà injective d'après la question précédente. Pour cela, on doit avoir $f(I) = J$. On choisit donc $K = f(I)$.*

Exercice 25 *Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\exists G \subset F$ *telle que* f *est une bijection de* E *dans* G *;*

ii) f *est injective.*

Correction *Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii). En effet, si f est injective, alors choisir $G = f(E)$ suffit à assurer la bijectivité et donc la bijectivité de $f : E \to G$.*
Il est aussi clair que ii) $\Rightarrow$ i) par contraposée. En effet, si $\forall G \subset F$, $f : E \to G$ n'est jamais une bijection, alors $f : E \to F$ ne peut pas être injective.

Exercice 26 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.*

1. *Soit y un réel. Combien y possède-t-il d'antécédents ? On discutera selon la valeur de y.*
2. *f est-elle injective ? surjective ?*
3. *Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.*
4. (a) *Soit y un réel ayant exactement deux antécédents x_1 et x_2 par f. Déterminer la valeur du produit x_1x_2, puis montrer qu'un et un seul des réels x_1 et x_2 appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.*
   (b) *En déduire que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.*

Correction

1. *Soit $y \in \mathbb{R}$, alors*
$$y = f(x) \iff y = \frac{2x}{1+x^2} \iff yx^2 - 2x + y = 0.$$
On considère le trinôme du second degré $P_y(x) = yx^2 - 2x + y$. Son discriminant est $\Delta_y = 4 - 4y^2$. Ainsi, si $y \neq 0$:
   - *Si $\Delta_y < 0$, c'est-à-dire $1 - y^2 < 0$, autrement dit $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $P_y(x) \neq 0$ et y n'admet donc pas d'antécédent par f.*
   - *Si $\Delta_y = 0$, c'est-à-dire $1 - y^2 = 0$, autrement dit $y \in \{-1, 1\}$, alors $P_y(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{2}{2y} = \dfrac{1}{y}$ et y (qui vaut -1 ou 1) admet un unique antécédent $x = \dfrac{1}{y}$ (qui vaut aussi respectivement -1 ou 1) par f.*
   - *Si $\Delta_y > 0$, c'est à dire $y \in]-1, 1[$, alors $P_y(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}, \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\}$ qui sont les deux antécédents de y par f.*

   De plus, si $y = 0$, alors $x = 0$ est son unique antécédent par f.
2. *f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent. f n'est pas injective car $y = 1/2$ admet deux antécédents par f.*
3. *Pour déterminer $f(\mathbb{R})$, il suffit d'étudier la fonction f. Cette fonction est continue et dérivable comme quotient de fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule jamais. Sa dérivée au point $x \in \mathbb{R}$ vaut $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. On a ainsi $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$. On trouve aisément que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ valent 0 toutes les deux. De plus $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.*
4. (a) *Dans ce cas, on sait que les antécédents de $y \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ par f sont $\{\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}, \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\}$ dont le produit vaut 1. De plus, il est clair que $\left|\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|} + \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1} > \dfrac{1}{|y|} > 1$, et ainsi, comme le produit des deux antécédent vaut 1, on a $\dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1]$.*
   (b) *Il est clair d'après les questions précédentes que tout élément $y \in [-1, 1]$ admet un unique antécédent par g dans $[-1, 1]$:*
      - *si $y = 0$, son unique antécédent par g est $x = 0$;*
      - *si $y = -1$, son unique antécédent par g est $x = -1$;*

— *si* $y = 1$, *son unique antécédent par* g *est* $x = 1$;

— *si* $y \in]-1, 1[$, *son unique antécédent par* g *est* $\dfrac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \in [-1, 1]$.

On en déduit que g *est une bijection.*

Exercice 27 *Soient* E *et* F *deux ensembles, et* f *une application de* E *dans* F. *Soient également* A_1 *et* A_2 *deux parties de* E, *et* B_1 *et* B_2 *deux parties de* F.

1. *Montrer que* $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. *La réciproque est-elle vraie ?*
2. *Montrer que* $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. *L'inclusion réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer que* $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Correction

1. *On suppose que* $B_1 \subset B_2$. *Montrons que* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. *Soit* $x \in f^{-1}(B_1)$, *alors* $f(x) \in B_1$. *Comme* $B_1 \subset B_2$, *on en déduit que* $f(x) \in B_2$, *et ainsi* $x \in f^{-1}(B_2)$. *La réciproque est fausse (trouvez un contre-exemple !).*
2. *Soit* $y \in f(A_1 \cap A_2)$, *alors il existe* $x \in A_1 \cap A_2$ *tel que* $y = f(x)$. *Comme* $x \in A_1$, *alors* $y \in f(A_1)$ *et comme* $x \in A_2$ *alors* $y \in f(A_2)$. *On en déduit que* $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. *L'inclusion réciproque n'est vraie que si* f *est injective (cf. Exercice 19).*
3. *On a* $f(A_1 \cup A_2) = \{f(x) : x \in A_1 \cup A_2\} = \{f(x) : x \in A_1\} \cup \{f(x) : x \in A_2\} = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 28 *Soient* E *et* F *deux ensembles, et* f *une application de* E *dans* F.

1. *Montrer que pour toute partie* A *de* E, *on a* $A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
2. *Montrer que pour toute partie* B *de* F, *on a* $f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B$.
3. *Montrer que* f *est injective si et seulement si pour toute partie* A *de* E, *on a* $A = f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
4. *Montrer que* f *est surjective si et seulement si pour toute partie* B *de* F, *on a* $f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B$.

Correction

1. *Soit* $x \in A$, *alors* $f(x) \in f(A)$ *et donc* $x \in f^{-1}(f(A))$. *On a donc* $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. *Soit* $y \in f\Big(f^{-1}(B)\Big)$, *alors il existe* $x \in f^{-1}(B)$ *tel que* $y = f(x)$. *On a donc* $f(x) \in B$ *ce qui entraîne que* $y \in B$. *On a donc* $f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B$.
3. *On sait déjà que* $A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big)$. *On doit donc montrer que* f *est injective si et seulement si* $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \subset A$.

   Supposons que f *est injective. Soit* $x \in f^{-1}\Big(f(A)\Big)$, *alors* $f(x) \in f(A)$ *et donc il existe* x' *(non nécessairement égal à* x*) tel que* $f(x) = f(x')$. *Comme* f *est injective, on en déduit que* $x = x'$, *et donc* $x \in A$. *On a montré que* $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \subset A$.

   Réciproquement, supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \subset A$. *Montrons que* f *est injective. Soient* $(x_1, x_2) \in E^2$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2) = y$. *Choisissons* $A = \{x_1\}$. *On a ainsi* $f(A) = f(\{x_1\}) = \{y\}$ *et donc* $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\})$. *Par hypothèse, on sait que* $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \subset A$, *ce qui implique que* $f^{-1}(\{y\}) \subset \{x_1\}$. *Or* $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ *car* $f(x_2) = y$. *On en déduit que* $x_1 = x_2$ *et donc que* f *est injective.*
4. *On sait déjà que pour toute partie* B *de* F, *on a* $f(f^{-1}(B)) \subset B$. *On doit donc montrer que* f *est surjective si et seulement si pour toute partie* B *de* F, $B \subset f(f^{-1}(B))$.
   Supposons que f *est surjective. Soit* $y \in B$, *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$ *car* f *est surjective. Le fait que* $x \in f^{-1}(B)$ *entraîne que* $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ *et donc* $B \subset f(f^{-1}(B))$.
   Réciproquement, supposons que $B \subset f(f^{-1}(B))$ *pour toute partie* B *de* F. *Appliquons ce résultat à* $B = \{y\}$. *On a alors* $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$ *ce qui s'écrit aussi* $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$. *Il existe donc* $x \in f^{-1}(\{y\})$ *tel que* $y = f(x)$ *et donc* f *est surjective.*

Exercice 29 *Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est une bijection.*

<u>**Correction**</u> *C'est évident car $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \mathrm{id}_E$. Ainsi f est bijective de bijection réciproque $f^{-1} : E \to E$ définie par $f^{-1} = f \circ f$.*