Université Claude Bernard Lyon 1 UE Algèbre 1
Semestre d'automne 2023-2024

Feuille 5 : Arithmétique

Exercice 1 *Vrai ou Faux. Etant donnés cinq nombres entiers consécutifs, on trouve toujours parmi eux :*

1. *Au moins deux multiples de* 2 *dont un multiple de* 4.
2. *Exactement un multiple de* 5.
3. *Au moins un multiple de* 6.

Exercice 2 *Soient* a, b *et* d *trois entiers. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

1. *Si* d *divise* a *et* b*, alors* d *divise leur* $PGCD$.
2. *S'il existe deux entiers* u *et* v *tels que* $au + bv = d$*, alors* d *divise* $PGCD(a, b)$.
3. *Si* $PGCD(a, b)$ *divise* d*, alors il existe un couple d'entiers* (u, v)*, tel que* $au + bv = d$

Exercice 3 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ *est divisible par* 24.

Exercice 4 *Calculer le pgcd de* 48 *et* 210*, et de* 81 *et* 237*. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.*

Exercice 5 *Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de* 18480 *et* 9828*. En déduire une écriture de* 84 *comme combinaison linéaire de* 18480 *et* 9828.

Exercice 6
1. *Déterminer les couples d'entiers naturels premiers entre eux dont le produit est 6.*
2. *Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 35 et ppcm 210.*
3. *Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et produit 6480.*
4. *Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et somme 360.*

Exercice 7 *Démontrer que, si* a *et* b *sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers* $a+b$ *et* ab.

Exercice 8 *Soit* a *et* b *deux entiers premiers entre eux. On définit une suite* (u_n) *en posant* $u_0 = a$, $u_1 = b$ *puis* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *pour tout* $n \geq 0$*. En effectuant un raisonnement par récurrence, montrer que deux termes consécutifs de cette suite sont premiers entre eux.*

Exercice 9 *Soient* a, b *des entiers supérieurs ou égaux à* 1*. Montrer :*

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$ *;*
2. $2^p - 1$ *premier* $\Rightarrow$ p *premier ;*

Exercice 10 *Pour m entier naturel, à quoi peut être égal le reste de la division euclidienne de m par 4 ? En déduire que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.*

Exercice 11 *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.*

Exercice 12 *Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.*

Exercice 13 *Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.*

Exercice 14 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

1. *Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ si n est impair.*
2. *Montrer que $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $n^2 \equiv 4 \pmod 8$ si n est pair.*
3. *Soient a, b, c trois entiers impairs.*
   - i) *Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $(a + b + c)^2$. En déduire le reste modulo 8 de $2(ab + bc + ca)$.*
   - ii) *Existe-il un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = ab + bc + ca$?*

Exercice 15 *L'objectif de l'exercice est de déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation $(E) \quad 2^m - 3^n = 1$.*

1. *Soit m un entier supérieur ou égal à 3 et n un entier naturel. En utilisant des congruences modulo 8, montrer que (m, n) n'est pas solution de l'équation (E).*
2. *Résoudre (E).*

Exercice 16 *Trouver* **une** *solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1\,[11]$ puis* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 0\,[11]$. En déduire* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $5x \equiv 1\,[11]$.*

Exercice 17 *Trouver* **une** *solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 1$ puis* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 0$. En déduire* **toutes** *les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $58x + 21y = 1$.*

Exercice 18 *Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$(a)\ 1665x + 1035y = 45 \qquad (b)\ 14x + 35y = 21 \qquad (c)\ 637x + 595y = 29.$$

Exercice 19 *On considère dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :*

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13 & \pmod{19} \\ n \equiv 6 & \pmod{12} \end{cases} \qquad (S_0) \begin{cases} n \equiv 0 & \pmod{19} \\ n \equiv 0 & \pmod{12} \end{cases}$$

Trouver **une** *solution du système (S) puis* **toutes** *les solutions du système (S_0). En déduire* **toutes** *les solutions du système (S).*

Exercice 20

1. *Déterminer une relation de Bézout entre 7 et 17.*

2. *Soit a et b deux entiers. On considère dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :*

$$(S)\begin{cases} n \equiv a & \pmod{17} \\ n \equiv b & \pmod{7} \end{cases} \qquad (S_0)\begin{cases} n \equiv 0 & \pmod{17} \\ n \equiv 0 & \pmod{7} \end{cases}$$

$$(S_1)\begin{cases} n \equiv 1 & \pmod{17} \\ n \equiv 0 & \pmod{7} \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} n \equiv 0 & \pmod{17} \\ n \equiv 1 & \pmod{7} \end{cases}$$

En utilisant la première question, trouver **une** *solution du système (S_1) et* **une** *solution du système (S_2). En déduire* **une** *solution du système (S). Déterminer par ailleurs* **toutes** *les solutions du système (S_0). En déduire* **toutes** *les solutions du système (S).*

Exercice 21 *Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que X n'est pas vide.*
2. *Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.*
3. *On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.*
   Soit $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. *Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.*

Exercice 22 *Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que n est de la forme $n = 2^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Que penser de la conjecture : $2^{2^n} + 1$ est premier pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?*

Exercice 23

1. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$ on a :*

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right).$$

2. *On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.*
3. *En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.*

Exercice 24 *Donner la valeur en base dix des nombres suivants :*

1. $(110101001)_2$;
2. $(110101001)_3$;
3. $(1367)_8$;
4. $(1402)_5$.

Exercice 25 *Écrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée.*

1. 255 *en base deux ;*
2. 1907 *en base seize ;*
3. 2016 *en base sept ;*
4. 2000 *en base deux mille.*

Exercice 26 *Montrer que pour tout entier n impair, l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 8.*

Exercice 27 *Soit n un entier naturel non nul. En utilisant une identité à la Bézout, montrer que $2n+1$ et $9n+4$ sont premiers entre eux. Recommencer avec $3n-2$ et $5n-3$.*

Exercice 28
1. *Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier 36 ?*
2. *Soit n un entier naturel non nul. Montrer que le nombre de diviseurs positifs de n^2 est impair.*
3. *Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier 15 ! ?*

Exercice 29 *En France, le numéro d'inscription au répertoire des personnes physiques (le « numéro de sécurité sociale ») est un nombre a qui comporte 13 chiffres en base 10.*

La clé associée à un tel nombre a est le reste de la division euclidienne de $-a$ par 97.

1. *Montrer que si deux numéros a et b diffèrent sur un chiffre et un seul, ils ont des clés différentes - ce qui permet la détection d'une erreur de transcription simple.*
2. *Montrer qu'il en est de même pour deux numéros a et b qui diffèrent par transposition de deux chiffres consécutifs.*

Exercice 30 *Soit p un nombre premier impair. On notera $A = \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.*

1. *Soit x et y deux éléments distincts de A.*
   - *i) Montrer que $2 < x+y < p-1$ et en déduire que p ne divise pas $x+y$.*
   - *ii) Montrer que p ne divise pas $x-y$.*
   - *iii) Montrer que $x^2 \not\equiv y^2$ modulo p.*
   - *iv) Conclure que les restes des divisions euclidiennes des carrés éléments de A par p sont tous distincts.*
2. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(p-k)^2 \equiv k^2$ modulo p. En déduire que les restes des divisions euclidiennes des carrés des éléments de $\{\frac{p+1}{2}, \dots, p-2, p-1\}$ par p sont les mêmes que les restes des divisions euclidiennes des carrés des éléments de A par p.*
3. *Combien de valeurs peut prendre le reste de la division euclidienne d'un carré par p ? Dans l'exemple de $p = 7$, en donner la liste complète.*

Exercice 31 *Soit x et y deux entiers. Expliciter un entier z pour lequel $x^2 - 6xy + 2y^2$ est congru à z^2 modulo 7. En déduire que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions entières.*

Exercice 32 *Soit p un nombre premier de la forme $4k+3$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que p divise n^2+1.*

Exercice 33 *Montrer que :* $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

Exercice 34 *Trouver les deux derniers chiffres du nombre* $7^{9^{9^9}}$.

Exercice 35 *Quel est le reste dans la division par 11 de* 1996^{1996} *?*

Exercice 36 *Déterminer les solutions des congruences suivantes :*

1) $10x \equiv 25\ [15]$ *2)* $10x \equiv 35\ [21]$

Exercice 37 *Montrer que* $(2^{22n} - 1)(2^{16n} - 1) \equiv 0 \quad [391]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 38 *Montrer que :* $\forall k \in \mathbb{N}\ , \quad 19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$.