

Feuille 6 : Polynômes

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\dots(1 + X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

CORRECTION

On montre par récurrence que les coefficients de P_n sont tous égaux à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $A(n)$ la proposition " $P_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+1}-1}$ ".

$P_0 = 1 + X$ donc $A(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons $A(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n(1 + X^{2^{n+1}}) = P_n + X^{2^{n+1}}(1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+1}-1}) \\ &= 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+1}-1} + X^{2^{n+1}} + \dots + X^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} \\ &= 1 + X + X^2 + \dots + X^{2^{n+2}-1}, \end{aligned}$$

d'où $A(n+1)$ est vraie. On en déduit que $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2 + 1) = P(X)$
2. $P(2X + 1) = P(X)$

CORRECTION

Remarquons que $P = 0$ convient. On suppose maintenant que $P \neq 0$ et on pose $\deg P = n \geq 0$.

1. En supposant l'égalité, et en regardant les degrés, on trouve que

$$\deg P(X^2 + 1) = 2n = n = \deg P.$$

Cela implique que $n = 0$ et donc $P(X) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si P est un polynôme constant, la relation est facilement vérifiée.

Donc, la relation est vérifiée si et seulement si P est constant.

2. Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour tout $0 \leq j \leq n$. Le coefficient dominant du polynôme composé $P(2X + 1)$ est alors $a_n 2^n$. Par égalité, il faut alors $a_n = a_n 2^n$; cela est vrai si et seulement si $2^n = 1$, et donc si et seulement si $n = 0$ (autrement dit, $a_k = 0$ pour tout $k \geq 1$). Encore une fois, on trouve que les seuls polynômes qui vérifient l'égalité sont les polynômes constants : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a$.

Exercice 3. Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

CORRECTION

Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1 ou à -1 . Dans le premier cas, on peut écrire $Q(X) = X^2 + cX + d$. On a alors $Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + (2d + c^2)X^2 + 2cdX + d^2$. Par identification, on doit avoir $2c = 2a$, $2d + c^2 = b$, $2cd = 2$ et $d^2 = 1$. On trouve donc $c = a$ et $d = \pm 1$. Si $d = 1$, alors $c = 1$, et donc $a = 1$ et $b = 3$. Si $d = -1$, alors $c = -1$, $a = -1$ et $b = -1$. Les deux solutions sont donc $P_1(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2$ et $P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2$.

Dans le deuxième cas, on écrit $Q(X) = -R(X)$ avec $R(X) = X^2 + cX + d$, de sorte que $Q^2(X) = R^2(X)$ et on retrouve en réalité le cas précédent.

Exercice 4. On considère l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

1. On note P une solution non nulle de cette équation, δ son degré et a son coefficient dominant.
 - a) Quel est le degré de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de δ .
 - b) Quel est le coefficient dominant de $P(2X)$? De $P'P''$? En déduire la valeur de a .
 - c) Déterminer P .
2. Conclure.

CORRECTION

1. Soient $\delta = \deg P \geq 0$ et $a \in \mathbb{C}$ le coefficient dominant de P .
 - a) $\deg P(2X) = \delta$. Comme P est non nul et $P(2X) = P'P''$, ni P' ni P'' ne sont nuls, donc $\deg P' = \delta - 1$ et $\deg P'' = \delta - 2$. Donc $\deg (P'P'') = 2\delta - 3$. Il faut donc $\delta = 2\delta - 3$, qui implique $\delta = 3$.
 - b) En vue de la question précédente, le coefficient dominant de $P(2X)$ est $8a$, celui de P' est $3a$ et celui de P'' est $6a$. Le coefficient dominant de $P'P''$ est alors $3a \cdot 6a = 18a^2$: pour avoir l'égalité, il faut donc que $8a = 18a^2$, c'est-à-dire

$$a(9a - 4) = 0.$$

La solution $a = 0$ n'est pas acceptable (sinon, $\deg P < 3$), et alors $a = 4/9$.

- c) De façon analogue, si on écrit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on calcule explicitement les polynômes $P(2X)$ et $(P'P'')(X)$, on trouve les égalités

$$\begin{cases} 4b = 18ab \\ 2c = 6ac + 4b^2 \\ d = 2bc, \end{cases}$$

qui impliquent $b = c = d = 0$.

2. Donc, les seuls polynôme qui vérifient l'égalité donnée sont le polynôme $P(X) = (4/9)X^3$ et le polynôme nul.

Exercice 5. Quelles sont les racines (dans \mathbb{C} et dans \mathbb{R}) des polynômes suivants?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$
2. $X^6 - 4$
3. $X^4 - 13X^2 + 36$
4. $X^4 + 6X^2 + 25$.

CORRECTION

1. 1 est racine évidente de $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$. On factorise donc $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = (X - 1)(X^2 - 6X + 8)$ et on calcule les racines de $X^2 - 6X + 8$ qui sont 2 et 4.
2. $X^6 - 4 = (X^3)^2 - 4 = (X^3 - 2)(X^3 + 2)$. Dans \mathbb{R} chacun de ces facteurs a une unique racine, on trouve donc deux racines réelles : $\sqrt[3]{2}$ et $-\sqrt[3]{2}$. Dans \mathbb{C} on calcule les racines 3-ièmes de 2 et -2. On trouve au total 6 racines complexes distinctes : $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{i2\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{-i2\pi}{3}}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{i5\pi}{3}}$.
3. On factorise $Y^2 - 13Y + 36 = (Y - 9)(Y - 4)$ et on pour chaque racine y de ce polynôme on résout $X^2 = y$. On a donc que 3, -3, 2, -2 sont les racines de $X^4 - 13X^2 + 36$.
4. On trouve les racines complexes de $Y^2 + 6Y + 25$ qui sont $y_1 = -3 + 4i$ et $y_2 = -3 - 4i$ et on calcule les racines carrées de chacun de ces deux nombres complexes. On trouve finalement 4 racines complexes (non réelles) : $\pm 1 \pm 2i$.

Exercice 6. 1. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans \mathbb{C} et dans \mathbb{R}) du polynôme $X^m - 1$?
 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Quelles sont les racines (dans \mathbb{C} et dans \mathbb{R}) du polynôme $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$?

CORRECTION

1. Du chapitre sur les complexes, on sait que les racines complexes du polynôme $X^m - 1$ sont les m racines m -ièmes de l'unité :

$$\left\{ e^{2\pi i k/m} \right\}_{k=0, \dots, m-1}.$$

De ça, on déduit que :

- si m est impair, la seule racine réelle est 1 ;
 - si m est pair, il y a deux racines réelles, 1 et -1 .
2. Soit $Q(X) = X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$. On sait que $(X - 1)Q(X) = X^{n+1} - 1$. Grâce à la question précédente, on déduit que les racines complexes de Q sont

$$\left\{ e^{2\pi i k/m} \right\}_{k=1, \dots, m-1}.$$

Pour les racines réelles :

- si n est pair, Q n'a pas de racines réelles ;
- si n est impair, la seule racine réelle de Q est -1 .

Exercice 7. Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur \mathbb{R} .

CORRECTION

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{163} + 24x^{57} - 6$. Elle est continue sur son domaine. Puisque $f(0) = -6$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit qu'il existe un réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$. Le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a donc au moins une racine sur \mathbb{R} .

Exercice 8. Deux polynômes U et V réels vérifient $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

CORRECTION

Pour tout $x > 0$ et $x \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à l'égalité précédente, on peut écrire

$$U(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} V(x).$$

On en déduit que U a un nombre infini de racines : notamment, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre réel $x = \pi/2 + k\pi$ est une racine de U . Par le théorème fondamental de l'algèbre, U est donc le polynôme nul. Un raisonnement analogue montre que aussi V est le polynôme nul.

Exercice 9. On définit une suite de polynômes $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2 \cos \theta)$.
4. Donner les racines de P_n .

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $H(n)$ la proposition : P_n est de degré n et son coefficient dominant est 1. On calcule $P_2 = X^2 - 2$. Les propositions $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. Le degré de XP_n est donc $n + 1$ et le degré de P_{n-1} est $n - 1$, donc le degré de P_{n+1} est $n + 1$. Le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de XP_n donc c'est 1. On en déduit que $H(n + 1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la proposition : “pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.”
 Les propositions $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons $A(k)$ vraie pour tout $k \leq n$.
 On calcule

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) &= (z + \frac{1}{z})P_n(z + \frac{1}{z}) - P_{n-1}(z + \frac{1}{z}) \\ &= (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{z^{n+1}} - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $A(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ la proposition : “ $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$ ”
 Les propositions $B(0)$ et $B(1)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et supposons $B(k)$ vraie pour tout $k \leq n$.
 On calcule

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2 \cos \theta) &= (2 \cos \theta)P_n(2 \cos \theta) - P_{n-1}(2 \cos \theta) \\ &= 2(\cos \theta)2 \cos(n\theta) - 2 \cos(n-1)\theta \\ &= 2(\cos \theta)2 \cos(n\theta) - 2 \cos(n\theta - \theta) \\ &= 2(\cos \theta)2 \cos(n\theta) - 2 \cos(n\theta) \cos \theta - 2 \sin(n\theta) \sin \theta \\ &= 2 \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

On en déduit que $B(n+1)$ est vraie et donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Puisque P_n est de degré n et $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$, on déduit que ses racines (pour $n \geq 1$) sont les réels $x_k = 2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$.

- Exercice 10.** 1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
 2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

CORRECTION

1. Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_1 - P_2$ divise $(P_1)^n - (P_2)^n$. Pour $n = 0$, la dernière expression est le polynôme nul, donc il n’y a rien à montrer. Pour $n \geq 1$, cela est une conséquence immédiate du fait que

$$X^n - Y^n = (X - Y) \left(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \dots + X^{n-1-k}Y^k + \dots + XY^{n-2} + Y^{n-1} \right).$$

2. On peut écrire

$$P(P(X)) - X = \left(P(P(X)) - P(X) \right) + \left(P(X) - X \right).$$

Bien sûr, $P(X) - X$ divise lui-même. D’autre côté, $P(X) - X$ divise aussi $P(P(X)) - P(X)$, par le point précédent (l’appliquer avec $Q = P$, $P_1 = P$ et $P_2(X) = X$).

Exercice 11. Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l’anneau de polynômes précisé :

1. $X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 2. $X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ 3. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ 4. $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. α , $\alpha(X + 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
 2. α , $\alpha(X - 1)$, $\alpha(X + 1)$, $\alpha(X^2 - 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
 3. α , $\alpha(X - i)$, $\alpha(X + i)$, $\alpha(X^2 + 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.
 4. α , $\alpha(X^2 + 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ un entier.

- Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
- En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

CORRECTION

- Après avoir calculer explicitement les cas $n = 0$ et $n = 1$, pour lesquels on a

$$1 = 0 \cdot (X^5 - 1) + 1 \quad \text{et} \quad X^5 = 1 \cdot (X^5 - 1) + 1,$$

on va prouver par récurrence que le reste est toujours égal au polynôme constant 1.

Il suffit l'hérédité, l'initialisation ayant été faite pour $n = 0$. Soit donc $n \geq 1$; on suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^{5n} = K(X)(X^5 - 1) + 1.$$

On peut alors écrire $X^{5(n+1)} = X^5 X^{5n}$, d'où

$$\begin{aligned} X^{5(n+1)} &= X^5 \left(K(X)(X^5 - 1) + 1 \right) \\ &= X^5 K(X)(X^5 - 1) + X^5 = X^5 K(X)(X^5 - 1) + X^5 - 1 + 1 \\ &= (X^5 - 1) \left(X^5 K(X) + 1 \right) + 1. \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée. On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

- Comme $99 \equiv 4 [5]$, $42 \equiv 2 [5]$, $35 \equiv 0 [5]$ et $27 \equiv 2 [5]$, de la question précédente on trouve que le reste est $X^4 + 2X^2 - 3 - 2X^2 + 3 = X^4$.

Exercice 13. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de sa division euclidienne par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

CORRECTION

On écrit la division euclidienne de P par $X - 7$: $P = Q(X - 7) + R$. On en déduit que R est de degré 0, donc une constante. On évalue les fonctions polynômiales $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto Q(x)(x - 7) + R$ en 7 et on trouve $P(7) = R$.

Exercice 14. Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X^2 + 1$.

CORRECTION

Version 1 (rapide, avec les complexes) : Le reste dans la division euclidienne de A par $X^2 + 1$ est de degré au plus 1. On le note $R_n = \alpha X + \beta$ avec α et β nécessairement réels. On note aussi Q_n le quotient. On évalue en i :

$$A(i) = (i^2 + 1)Q_n(i) + R_n(i) = 0 + \alpha i + \beta = (\cos a + i \sin a)^n = e^{ina} = \cos(na) + i \sin(na)$$

par la formule de Moivre. On trouve donc $\alpha = \cos(na)$ et $\beta = \sin(na)$ en identifiant les parties réelles et imaginaires. Donc $R_n = \cos(na) + X \sin(na)$

Version 2 (longue par récurrence) : Soit $A_n(X) := (X \sin a + \cos a)^n$. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} A_0(X) &= 0 \cdot (X^2 + 1) + 1 \\ A_1(X) &= 0 \cdot (X^2 + 1) + (X \sin a + \cos a) \\ A_2(X) &= \sin^2 a (X^2 + 1) + (X \sin(2a) + \cos(2a)). \end{aligned}$$

Si on appelle le reste de la division $R_n(X)$, on va alors montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$R_n(X) = X \sin(na) + \cos(na).$$

L'initialisation est le cas $n = 0$, déjà traité ci-dessus. On montre l'hérédité. On suppose alors la propriété connue pour un certain $n \geq 1$ et on va la montrer pour $n + 1$.

Pour cela, on écrit $A_{n+1}(X) = A_n(X) (X \sin a + \cos a)$: en utilisant l'hypothèse de récurrence, on voit tout de suite que le reste de la division est donné par le produit $R_n(X) (X \sin a + \cos a)$. Si on calcule ce produit, on trouve

$$\begin{aligned} R_n(X) (X \sin a + \cos a) &= X^2 \sin a \sin(na) + X (\sin a \cos(na) + \cos a \sin(na)) + \cos a \cos(na) \\ &= \sin a \sin(na) (X^2 + 1) + X \sin((n+1)a) + \cos a \cos(na) - \sin a \sin(na) \\ &= \sin a \sin(na) (X^2 + 1) + X \sin((n+1)a) + \cos((n+1)a). \end{aligned}$$

On en déduit que le reste est donc bien

$$R_{n+1}(X) = X \sin((n+1)a) + \cos((n+1)a),$$

comme voulu. L'hérédité est donc vérifiée. On peut alors affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$.

CORRECTION

1. $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$.

Exercice 16. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$.

CORRECTION

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} P(X) &= 1 \cdot Q(X) - (5X^3 - 7X^2 + 10X - 14) \\ Q(X) &= \frac{1}{25} (5X + 7) \cdot (5X^3 - 7X^2 + 10X - 14) + \frac{24}{25} (X^2 + 2) \\ 5X^3 - 7X^2 + 10X - 14 &= (5X - 7) (X^2 + 2). \end{aligned}$$

Donc $\text{PGCD}(P, Q) = X^2 + 2$. En remontant les égalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} X^2 + 2 &= \frac{25}{24} Q(X) - \frac{1}{24} (5X + 7) \cdot (5X^3 - 7X^2 + 10X - 14) \\ &= \frac{25}{24} Q(X) + \frac{1}{24} (5X + 7) \cdot (P(X) - Q(X)) \\ &= \frac{1}{24} (5X + 7) \cdot P(X) - \frac{1}{24} (5X - 18) Q(X). \end{aligned}$$

Donc $U(X) = (1/24)(5X + 7)$ et $V(X) = -(1/24)(5X - 18)$.

Exercice 17. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

CORRECTION

1. Puisque $X^{n+1} - 1 = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1)$, les racines de $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$ sont toutes les racines $n + 1$ -ièmes de l'unité sauf 1. On peut donc factoriser sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{i2k\pi}{n+1}}).$$

2. $X^{11} + 2^{11}$ a une unique racine réelle : -2 , la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles est

$$X^{11} + 2^{11} = (X + 2)(X^{10} - 2X^9 + 4X^8 - \dots + 2^{10}).$$

Dans $\mathbb{C}[X]$ on calcule les racines 11-ièmes de -2^{11} on trouve $X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{10} (X - 2e^{\frac{i(1+2k)\pi}{11}})$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$ on a la factorisation $X^4 + 4 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$. Dans $\mathbb{C}[X]$ on a $X^4 + 4 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)(X + 1 - i)(X + 1 + i)$.
4. On calcule les 4 racines 4-ièmes de j et on obtient

$$X^4 - j = \prod_{k=0}^3 (X - e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})}) = (X - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

5. $X^8 + X^4 + 1 = (X^4 + 1)^2 - X^4 = (X^4 + 1 - X^2)(X^4 + 1 + X^2)$.

D'autre part $X^4 + 1 + X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + 1 + X)(X^2 + 1 - X)$ et $X^4 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{3}X)(X^2 + 1 + \sqrt{3}X)$. D'où

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 + 1 + X)(X^2 + 1 - X)(X^2 + 1 - \sqrt{3}X)(X^2 + 1 + \sqrt{3}X).$$

Ces quatre facteurs sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (discriminant négatif).

6. $X^5 - 1$ a une unique racine réelle $X = 1$, les autres racines sont conjuguées. On factorise d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ en calculant les racines 5-ièmes de 1 et on regroupe les facteurs de la forme $(X - z)(X - \bar{z})$. On obtient finalement

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= \prod_{k=-2}^2 (X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}) \\ &= (X - 1) (X - e^{i\frac{2\pi}{5}}) (X - e^{-i\frac{2\pi}{5}}) (X - e^{i\frac{4\pi}{5}}) (X - e^{-i\frac{4\pi}{5}}) \\ &= (X - 1) \left(X^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} X + 1 \right) \left(X^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} X + 1 \right) \\ &= (X - 1) \left(X^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) X + 1 \right) \left(X^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) X + 1 \right) \end{aligned}$$

Exercice 18. Calculer le pgcd des couples de polynômes (P, Q) suivants :

- $P = 6(X - 1)^2(X + 2)^3(X^2 + 1)^4$ et $Q = 15(X - 1)(X + 7)^3(X^2 + 1)$,
- $P = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q = X^3 + X^2 - 2X$,
- $P = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $Q = X(X - 1)^2(X - 2)$,
- $P = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

CORRECTION

1. Les deux polynômes sont déjà décomposés en produit de facteurs irréductibles (sur \mathbb{R}) : on a alors

$$\text{PGCD}(P, Q) = (X - 1)(X^2 + 1).$$

2. On voit facilement que

$$\begin{aligned} P(X) &= X^6(X+2) - (X+2) = (X+2)(X^6-1) = (X+2)(X^3-1)(X^3+1) \\ &= (X+2)(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1) \\ Q(X) &= X(X^2+X-2) = X(X+2)(X-1). \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{PGCD}(P, Q) = (X-1)(X+2)$.

3. Si $n = 0$ alors $P = 0$ et donc $\text{PGCD}(P, Q) = Q$. Sinon, on a $P(0) = 1 \neq 0$ et $P(2) = (n-1)2^n + 1 \neq 0$, tandis que $P(1) = 0$. Il reste à voir si 1 est racine double de P . Pour cela, on calcule

$$P'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} = n(n+1)X^{n-1}(X-1).$$

D'où $\text{PGCD}(P, Q) = (X-1)^2$.

4. On pourrait utiliser l'algorithme d'Euclide. Par contre, ici c'est simple à voir que

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4(X-1) + X^2(X-1) + (X-1) = (X-1)(X^4 + X^2 + 1) \\ Q(X) &= X^3(X^4 + X^2 + 1) + 8(X^4 + X^2 + 1) = (X^4 + X^2 + 1)(X^3 + 8). \end{aligned}$$

Notez que ce n'est pas la décomposition en facteurs irréductibles de P et Q , mais c'est suffisant pour calculer le PGCD : on a $\text{PGCD}(P, Q) = X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 19. Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P .

1. Déterminer α .
2. Montrer que -1 est une racine double de P .
3. Montrer que j est une racine multiple de P .
4. Factoriser P , d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

CORRECTION

1. $P(-1) = 0$ donc $\alpha = 8$.
2. $X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1 = (X+1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$
3. j est une racine simple de $X^2 + X + 1$ et on remarque que $(X^2 + X + 1)^2 = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$, donc j est racine double de P .
4. D'après la question ci-dessus on a la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X+1)^2(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = (X+1)^2(X^2 + X + 1)^2$ et dans $\mathbb{C}[X]$ on a $P = (X+1)^2(X-j)^2(X-\bar{j})^2$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

CORRECTION

Calculons $P'(X) = a(n+1)X^n + nbX^{n-1}$. Alors 1 est racine multiple de P si et seulement si $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$: ces deux conditions impliquent que

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{n}{n+1}b \\ c = -\frac{1}{n+1}b. \end{cases} \iff (a, b, c) = \left(-\frac{n}{n+1}b, b, -\frac{1}{n+1}b \right).$$

On déduit que $P'(X) = nb(-X^n + X^{n-1})$, puis en dérivant que $P''(X) = nb(-nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2})$. Pour que 1 soit racine d'ordre au moins 3, il faut que $P''(1) = -nb = 0$, ce qui implique $b = 0$ et par suite que P est le polynôme nul. Donc si $P \neq 0$, 1 peut être une racine d'ordre au plus 2.

Exercice 21. Pour tout complexe a , on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a .
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

CORRECTION

1. $P'_a = 6X^2 + 6X + 6 = 6(X - j)(X - j^2)$ avec $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Donc $\text{PGCD}(P_a, P'_a) \neq 1$ seulement si j ou j^2 sont parmi les racines de P_a . Par ailleurs j et j^2 ne sont pas simultanément racine de P_a , sinon $X^2 + X + 1$ diviserait P_a ce qui n'est pas possible puisque $P_a = (X^2 + X + 1)(2X + 1) + 3X + a - 1$ et on voit bien que ce reste n'est nul pour aucune valeur de a . Si $P_a(j) = 0$ alors $\text{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j$ et si $P_a(j^2) = 0$, $\text{PGCD}(P_a, P'_a) = X - j^2$.
2. Si $P_a(j) = 0$, j est donc racine double de P_a . Ce sera le cas si $2j^3 + 3j^2 + 6j + a = 0$ donc si

$$a = -3j^2 - 6j - 2 = -3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 = \frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

De la même façon on trouve que j^2 est racine double de P_a si $a = -\frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 22. On considère l'équation suivante dans $\mathbb{R}[X]$: $(P')^2 = 4P$.

1. Déterminer toutes les solutions constantes de l'équation.
2. Soit P une solution non constante. Déterminer le degré de P , puis montrer que P possède au moins une racine multiple.
3. Conclure.

CORRECTION

1. Si P est constant, alors P' est le polynôme nul, et donc, pour avoir l'égalité, il faut nécessairement que P soit le polynôme nul.
2. On pose $\deg P = n \geq 1$. On a $\deg(P') = n - 1$, et donc il faut avoir $2(n - 1) = n$, ce qui donne $n = 2$. D'autre part, puisque

$$(P'(X))^2 = 4P(X),$$

toute racine α de P est aussi racine de P' (et réciproquement) et donc α est une racine double. Maintenant, P' étant de degré 1, il admet une unique racine réelle, qui est donc la seule racine double de P .

3. Comme conséquence de la question précédente, on écrit $P(X) = a(X - b)^2$, d'où $P'(X) = 2a(X - b)$. De l'égalité précédente, on trouve

$$4a^2(X - b)^2 = 4a(X - b)^2.$$

Cela donne $a = 1$, tandis que $b \in \mathbb{R}$ peut être un réel quelconque.

Exercice 23. Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \gamma}.$$

CORRECTION

Puisque $X^3 - 5X^2 + 6X - 1 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ on en déduit en développant $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 6$ et $\alpha + \beta + \gamma = 5$. De plus en évaluant en $X = 1$ on a aussi $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \gamma} &= \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta) + (1 - \alpha)(1 - \gamma) + (1 - \beta)(1 - \gamma)}{(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)} \\ &= 3 - 2(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \\ &= 3 - 2 \cdot 5 + 6 = -1. \end{aligned}$$

Exercice 24. Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P . Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

CORRECTION

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ racine de P . Alors $P(\alpha) = 0$, d'où on déduit

$$i = -2\alpha - 3\alpha^2 - \alpha^3 \in \mathbb{R} :$$

absurde. Donc P n'a pas de racines réelles.

2. On écrit

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) \\ &= X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve alors $\alpha + \beta + \gamma = -3$. Aussi, on a $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 2$ et $\alpha\beta\gamma = -i$. De ces relations, on déduit avant tout que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 9 - 4 = 5.$$

En plus, on a

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + 3\alpha\beta\gamma,$$

ce qui donne

$$\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 = 3i - 6.$$

Maintenant on calcule

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2) + 6\alpha\beta\gamma,$$

d'où on trouve

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (-3)^3 - 3(3i - 6) - 6(-i) = -9 - 3i.$$

Exercice 25. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P . Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

CORRECTION

Si P est le polynôme nul, le résultat est évident. Sinon, il existe $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$ tel que $P = QA$. On a donc $P' = Q'A + QA'$. On calcule $PQ' - P'Q = (QA)Q' - (Q'A + QA')Q = Q^2A'$. Puisque $A \neq 0$, alors Q^2 divise bien $PQ' - P'Q$.

Exercice 26. Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

CORRECTION

1. On écrit $P(X) = (X - a)Q(X) + \lambda$: on a alors $\lambda = P(a)$. De façon analogue, on a aussi $\mu = P(b)$. Si maintenant on écrit

$$P(X) = (X - a)(X - b)Q_1(X) + R(X), \quad \text{avec} \quad R(X) = \alpha X + \beta,$$

en évaluant cette expression en a et b on trouve

$$\begin{cases} P(a) = \lambda = \alpha a + \beta \\ P(b) = \mu = \alpha b + \beta \end{cases}$$

L'hypothèse $a \neq b$ garantit qu'il existe une unique solution (α, β) de ce système : des calculs explicites montrent que

$$\alpha = \frac{\lambda - \mu}{a - b} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a\mu - b\lambda}{a - b}.$$

2. En particulier, si $\lambda = \mu = 0$, on déduit que $\alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire $R \equiv 0$, et donc $(X - a)(X - b)$ divise P .

Exercice 27. On définit une suite de polynômes $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m .$$

4. Montrer que $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$\text{Pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \text{Pgcd}(P_m, P_n) .$$

5. Conclure que $\text{Pgcd}(P_m, P_n) = P_{\text{Pgcd}(m,n)}$.

CORRECTION

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $H(n)$ la propriété : $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
On a $P_2 = XP_1 - P_0 = X$ et $P_1^2 = 1 = 1 + 0 \cdot X$, donc $H(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $H(k)$ vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. On calcule

$$\begin{aligned} 1 + P_{n+1} P_{n+3} &= 1 + P_{n+1} (XP_{n+2} - P_{n+1}) \\ &= 1 + XP_{n+1} P_{n+2} - P_{n+1}^2 \\ &= 1 + XP_{n+1} (XP_{n+1} - P_n) - 1 - P_n (XP_{n+1} - P_n) \\ &= X^2 P_{n+1}^2 - 2XP_n P_{n+1} + P_n^2 \\ &= (XP_{n+1} - P_n)^2 = P_{n+2}^2 . \end{aligned}$$

La proposition $H(n+1)$ est vraie et donc $H(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} = 1$ le théorème de Bézout implique que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on note $A(n)$ la propriété : $P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$.
On a $P_{m+1} = 1P_{m+1} - 0 \cdot P_m$, donc $A(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On suppose $A(k)$ vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. On calcule

$$\begin{aligned} P_{n+1} P_{m+1} - P_n P_m &= (XP_n - P_{n-1}) P_{m+1} - P_n P_m \\ &= X(P_{m+n} + P_{n-1} P_m) - P_{n-1} P_{m+1} - P_n P_m \\ &= XP_{m+n} + XP_{n-1} P_m - (P_{m+n-1} + P_{n-2} P_m) - P_n P_m \\ &= XP_{m+n} - P_{m+n-1} + (XP_{n-1} - P_{n-2}) P_m - P_n P_m \\ &= XP_{m+n} - P_{m+n-1} = P_{m+n+1} . \end{aligned}$$

La propriété $A(n+1)$ est vraie et donc $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. Notons $Q = \text{PGCD}(P_n, P_m)$ et $T = \text{PGCD}(P_{m+n}, P_n)$. D'après (3), $Q \mid P_{m+n}$ et donc Q divise T . D'autre part, puisque $T \mid P_{m+n}$ et $T \mid P_n$, encore par (3), $Q \mid P_{n-1} P_m$. Mais P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux, donc T est premier avec P_{n-1} et alors par le lemme de Gauss $T \mid P_m$. On en déduit $T \mid Q$ et donc $T = Q$.
5. On déduit facilement de (4) que pour $k, d \in \mathbb{N}^*$, $(P_{m+nk}, P_n) = (P_m, P_n)$ et $(P_{dn}, P_n) = P_n$. On calcule le $\text{pgcd}(m, n)$ via l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1 \\ n &= r_1 q_2 + r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1} + 0, \end{aligned}$$

où r_k est le dernier reste non nul (donc $\text{pgcd}(m, n) = r_k$.) On a donc

$$\text{pgcd}(P_m, P_n) = \text{pgcd}(P_{nq_1+r_1}, P_n) = \text{pgcd}(P_{r_1}, P_n) = \text{pgcd}(P_{r_1}, P_{r_2}) = \dots = \text{pgcd}(P_{r_k}, P_{q_{k+1}r_k}) = P_{r_k} .$$

Exercice 28. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

CORRECTION

Vu que $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, on a que les racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont $j = e^{i2\pi/3}$ et \bar{j} . Par un théorème du cours, il suffit de vérifier que j est racine aussi de P_n . Après avoir remarqué que

$$j^3 = \bar{j}^3 = 1, \quad j^2 = -j - 1 \quad \text{et aussi} \quad j^2 = \bar{j},$$

on a que $P_n(j) = \bar{j}^n + j^n + 1$.

Trois cas sont alors possibles.

1. $n \equiv 0 [3]$: on a alors que $j^n = \bar{j}^n = 1$, et donc $P_n(j) = 3$. Alors $X^2 + X + 1$ ne divise pas P_n .
2. $n \equiv 1 [3]$: on a alors que $j^n = j$ et $\bar{j}^n = \bar{j}$, d'où on trouve

$$P_n(j) = \bar{j} + j + 1 = 0.$$

Dans ce cas, $X^2 + X + 1$ divise P_n .

3. $n \equiv 2 [3]$: on a alors que $j^n = j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^n = \bar{j}^2 = j$; on en déduit (comme dans le cas précédent) que $X^2 + X + 1$ divise P_n .

Exercice 29. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

CORRECTION

On applique l'algorithme d'Euclide. On suppose par exemple $n > m$, et on écrit $n = mq + r$, avec $0 \leq r < m$. Alors on a :

$$X^n - 1 = X^{mp+r} - 1 = X^r(X^{mp} - 1) + X^r - 1.$$

Le point crucial est que $X^{mp} - 1$ est divisible par $X^m - 1$. En effet, $X^{mp} - 1 = (X^m - 1)(X^{m(p-1)} + X^{m(p-2)} + \dots + X^m + 1)$. Ainsi, $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = \text{pgcd}(X^r - 1, X^m - 1)$. Mais puisque $\text{pgcd}(n, m) = \text{pgcd}(m, r)$, on en déduit finalement que $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\text{pgcd}(n,m)} - 1$.

Exercice 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

CORRECTION

On note que, pour tout k fixé entre 0 et $n - 1$, on a

$$2 \cos(2k\pi/n) = 2\Re(e^{i2k\pi/n}) = e^{i2k\pi/n} + e^{-i2k\pi/n} \quad \text{et} \quad 1 = e^{i2k\pi/n} e^{-i2k\pi/n}.$$

Donc on peut décomposer

$$X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1 = (X - e^{i2k\pi/n})(X - e^{-i2k\pi/n}).$$

En d'autres termes, pour chaque k fixé, le terme $X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1$ s'écrit comme le produit entre une racine n -ième de l'unité et son complexe conjugué. Mais son complexe conjugué est aussi une racine n -ième de l'unité, et en faisant varier k on prend toutes les racines. On en déduit que

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) &= \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i2k\pi/n})(X - e^{-i2k\pi/n}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i2k\pi/n}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{-i2k\pi/n}) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i2k\pi/n}) \right)^2 = (X^n - 1)^2. \end{aligned}$$

Exercice 31. Pour $n \geq 1$, on note $P_n = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^p \tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ et de $\sum_{k=0}^{p-1} \tan^2\left(\frac{k\pi}{2p}\right)$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

CORRECTION

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $p \geq 0$ l'unique entier tel que

$$n = \begin{cases} 2p + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2p + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque facilement que $\deg(P_n) = 2p + 1$. En effet,

$$\begin{aligned} P_n &= (1 + iX)^n - (1 - iX)^n \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (i^\ell - (-i)^\ell) X^\ell \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k+1} (i^{2k+1} - (-i)^{2k+1}) X^{2k+1} \\ &= 2i \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1} \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $P(-i) \neq 0$, z est une racine de P si et seulement si $\frac{1+iz}{1-iz}$ est une racine n -ième de l'unité différente de -1 . On a donc

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff \exists k \in \{-p, \dots, 0, \dots, p\} \mid \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \{-p, \dots, 0, \dots, p\} \mid z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{i(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)} = \frac{(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}) e^{i\frac{k\pi}{n}}}{i(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}) e^{i\frac{k\pi}{n}}} \\ &\iff \exists k \in \{-p, \dots, 0, \dots, p\} \mid z = \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

De (??) et (??), on déduit que

$$\begin{aligned} P_n(X) &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} \prod_{k=-p}^p \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \prod_{k=1}^p \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \left(X - \tan\left(\frac{-k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \prod_{k=1}^p \left(X^2 - \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

On obtient alors le résultat demandé en identifiant les monômes de degré $(2p - 1)$ dans (??) et (??) :

$$2i(-1)^{p-1} \binom{n}{2(p-1)+1} X^{2(p-1)+1} = 2i(-1)^p \binom{n}{2p+1} X \sum_{k=1}^p \left(-\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) X^{2(p-1)}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^p \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\binom{n}{2p-1}}{\binom{n}{2p+1}} = \begin{cases} p(2p+1) & \text{si } n = 2p+1 \\ \frac{p(2p+1)}{3} & \text{si } n = 2p+2. \end{cases}$$

Exercice 32. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

CORRECTION

1. On calcule

$$P(1/z) = \sum_{i=0}^n a_i (1/z)^i = \sum_{i=0}^n a_i \frac{1}{z^i} = \frac{1}{z^n} \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i},$$

où on a calculé le dénominateur en commun. Maintenant, par hypothèse de symétrie sur les coefficients, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = \sum_{i=0}^n a_{n-i} z^{n-i} = \sum_{i=0}^n a_i z^i = P(z).$$

Donc on a trouvé que $P(1/z) = P(z)/z^n$. Du moment que z est racine, $P(z) = 0$, et alors aussi $P(1/z) = 0$.

2. On cherche une racine non-triviale ($\neq 0, \pm 1$) pour pouvoir appliquer le résultat précédent. On voit tout de suite que 2 est racine du polynôme. On sait alors que aussi 1/2 l'est. Autrement dit, $X - 2$ et $2X - 1$ divisent le polynôme donné. Par division euclidienne, on a

$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 = (X - 2)(2X - 1)(3X^2 - 10X + 3).$$

Maintenant, le polynôme $3X^2 - 10X + 3$ vérifie l'hypothèse de symétrie précédente. C'est facile à voir que 3 est une racine, et donc aussi 1/3. On en déduit que $3X^2 - 10X + 3 = (X - 3)(3X - 1)$ (la vérification est immédiate). Finalement, on trouve

$$6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6 = (X - 2)(2X - 1)(X - 3)(3X - 1).$$

Exercice 33. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X + 1) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

CORRECTION

On écrit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_dX^d$. Alors

$$\begin{aligned} P(X + 1) &= (a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_dX^d) + \\ &\quad a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + da_dX^{d-1} + \\ &\quad a_2 + 3a_3X + \dots + \binom{d}{2} a_d X^{d-2} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad a_{d-1} + da_dX + \\ &\quad a_d. \end{aligned}$$

Donc $P(X + 1) = P(X) + P'(X) + \frac{P^{(2)}(X)}{2} + \dots + \frac{P^{(d)}(X)}{d}$.

Exercice 34. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et d son degré. Pour n entier naturel, on définit u_n comme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$. Montrer que $(u_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une suite arithmétique.

CORRECTION

Soit $P(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \dots$. Par les relations coefficients- racines, on sait que $u_0 = a_1$. De façon analogue, $P'(X) = dX^{d-1} + a_1(d-1)X^{d-2} + \dots$, d'où on a $u_1 = a_1(d-1)/d$. De la dérivée seconde, on trouve $u_2 = a_1(d-2)/d$. En général, pour tout $k \in [0, d]$, on a

$$u_k = a_1 \frac{d-k}{d}.$$

Donc, on calcule

$$u_{k-1} - u_k = a_1 \frac{d-k+1}{d} - a_1 \frac{d-k}{d} = \frac{a_1}{d} (d-k+1 - d+k) = \frac{a_1}{d},$$

qui est constant en k .

Exercice 35. Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines complexes dont la somme vaut 2.

CORRECTION

Notons $a, b \in \mathbb{R}$ les deux racines dont la somme vaut 2. Alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X-a)(X-b)(X^2+cX+d) = (X^2-2X+ab)(X^2+cX+d)$. On développant et en identifiant les coefficients on trouve $c = 2$, $d = 4 - ab$ et $2ab - 2d = 12$. On en déduit $ab = 5$ et $d = -1$. On a finalement

$$P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1) = (X^2 - 2X + 5)(X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2}).$$

Exercice 36. Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité (*) :

$$(X + 3)P(X) = XP(X + 1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant (*). Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer finalement que P vérifie (*) si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

CORRECTION

1. De (*), on trouve tout de suite que $3P(0) = 0$, donc 0 est une racine de P , et alors $P(X) = XQ(X)$, pour un certain polynôme Q .
2. La relation (*) devient alors (**):

$$(X + 3)XQ(X) = X(X + 1)Q(X + 1).$$

Le polynôme à droite s'annule si calculé en -1 , d'où $Q(-1) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler). En utilisant cette dernière propriété, le membre de droite s'annule aussi si calculé en -2 , d'où $Q(-2) = 0$ (parce que le membre de gauche aussi doit s'annuler).

3. De la question précédente, on déduit que $X + 1$ et $X + 2$ divisent Q , et donc aussi P . On peut alors écrire

$$P(X) = aX^m(X+1)^n(X+2)^pR(X),$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Aussi, on peut supposer que $X, X + 1$ et $X + 2$ ne divisent pas R . La relation (*) devient alors

$$(X + 3)aX^m(X+1)^n(X+2)^pR(X) = Xa(X+1)^m(X+2)^n(X+3)^pR(X+1) \quad (4)$$

L'égalité précédente implique déjà que $m = 1$ (à cause des puissances de X), et alors $n = 1$ (puissances de $X + 1$) et $p = 1$ (puissances de $X + 2$). Cela implique que $X + 3$ ne divise pas R , autrement dit que -3 n'est pas racine de R , et donc de P non plus.

Il nous reste à prouver que $R(X) = 1$.

Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0, -1, -2, -3$ est une autre racine de P , donc α est une racine de R . De l'égalité précédente, calculée en α , on trouve alors

$$0 = \alpha a (\alpha + 1)^m (\alpha + 2)^n (\alpha + 3)^p R(\alpha + 1).$$

Cela implique $R(\alpha + 1) = 0$, et donc $\alpha + 1$ est une autre racine de R . Cela implique que $\alpha \neq -4$; en itérant (il faudrait faire une récurrence), on trouve que $\alpha \neq -k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre côté, le même argument montre que $\alpha + k$ est une racine de R , pour tout $k \in \mathbb{N}$. R aurait donc une infinité de racine, et le théorème fondamental de l'algèbre impliquerait que $R \equiv 0$, d'où $P \equiv 0$: absurde. L'absurde vient de supposer que R admettait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ différente de celles qu'on a déjà trouvées, et alors la seule possibilité est que $R \equiv 1$ (on avait choisi R unitaire).

4. On a prouvé que, forcément, il faut avoir $P(X) = aX(X+1)(X+2)$. D'autre côté, si P est de la forme précédente, P vérifie (*). La preuve est alors complète.

Exercice 37. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ . Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\beta + \alpha}.$$

CORRECTION

Puisque $X^3 + aX^2 + bX + c = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ on en déduit $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = b$, $-(\alpha + \beta + \gamma) = a$ et $\alpha\beta\gamma = c$. De ces trois identités on peut aussi en déduire $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b$. Finalement en mettant sur le même dénominateur l'expression $S = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\beta + \alpha}$ et faisant apparaître les termes identifiés ci-dessus on trouve

$$S = \frac{a(a^2 - 2b) + 3c}{ab + c}$$